

11

Bissectrices et hauteurs d'un triangle

Utiliser les propriétés des bissectrices et des hauteurs d'un triangle.

01

Bissectrice d'un angle

Définition

La bissectrice d'un angle est la demi-droite d'origine le sommet de cet angle et qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

$[AI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ signifie :

$$\widehat{BAI} = \widehat{IAC}.$$

Remarque

Le terme *bissectrice* peut désigner une droite ou une demi-droite selon les situations.

Propriété

Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des deux côtés de cet angle.

Propriété

Tout point équidistant des deux côtés d'un angle appartient à la bissectrice de cet angle.

02

Bissectrices d'un triangle

Définition

Les bissectrices des angles d'un triangle ABC sont appelées les bissectrices du triangle ABC .

Propriété

Les bissectrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .

Remarque

Le point d'intersection des bissectrices est équidistant des côtés du triangle.

03

Hauteurs d'un triangle

Définition

Une hauteur d'un triangle ABC est une droite qui passe par un sommet du triangle ABC et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Propriété

Les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en un point appelé **orthocentre** de ce triangle.

Remarque

Pour construire l'orthocentre d'un triangle, il suffit de construire deux hauteurs.

04 Utiliser la somme des angles d'un triangle**Exemple**

ABC est un triangle tel que :

$$\widehat{ABC} = 50^\circ, \quad \widehat{ACB} = 64^\circ.$$

Les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en I .

Calculons d'abord :

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 50^\circ - 64^\circ = 66^\circ.$$

Puis, puisque $[AI)$ est la bissectrice de $\widehat{BAC}$:

$$\widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 33^\circ.$$

05 Hauteurs d'un triangle**Exemple**

ABC est un triangle.

E et F sont les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur les droites (BC) et (AC) . Les droites (EA) et (FB) se coupent en G .

Comme $(AE) \perp (BC)$ et $(BF) \perp (AC)$, (AE) et (BF) sont deux hauteurs du triangle ABC . Leur point d'intersection G est donc l'orthocentre de ABC .

Par conséquent, la troisième hauteur passe aussi par G :

$$(CG) \perp (AB).$$

06 Construire le cercle inscrit à un triangle**Exemple**

Construire un triangle ABC tel que :

$$AB = 11 \text{ cm}, \quad AC = 7,5 \text{ cm}, \quad BC = 7 \text{ cm},$$

puis construire son cercle inscrit.

On trace deux bissectrices du triangle. Leur point d'intersection I est le centre du cercle inscrit.

Si H est le projeté orthogonal de I sur un côté du triangle, le cercle de centre I et de rayon IH est le cercle inscrit au triangle ABC .