

1 APIC ■ Semestre 1 ■ Calcul numérique

10

Puissances

Utiliser les puissances, leurs propriétés et l'écriture scientifique.

01

Puissance d'un nombre décimal relatif

Définition

Soit a un nombre décimal relatif et n un entier supérieur à 1 :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

On convient que :

$$a^1 = a \quad \text{et} \quad a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0.$$

Dans a^n , a est la base et n est l'exposant.

Remarque

 a^n se lit « a exposant n ». a^2 est le carré de a et a^3 est le cube de a .

Exemple

$$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216,$$

$$(0,02)^2 = 0,02 \times 0,02 = 0,0004,$$

$$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625.$$

02

Signe d'une puissance

Règle

Une puissance est négative si sa base est négative et son exposant est impair.
Elle est positive dans les autres cas.

Exemple

$$(-1)^{2016} = 1 \quad \text{et} \quad (-1)^{2017} = -1.$$

$$(-2017)^{2017}$$

est négatif car $-2017 < 0$ et 2017 est impair.

03

Puissances de 10

Propriété

Si n est un entier positif :

$$10^n = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ zéros}}.$$

Exemple

$$10^6 = 1\,000\,000, \quad 10^4 = 10\,000, \quad 3 \times 10^8 = 300\,000\,000.$$

04**Notation scientifique d'un nombre décimal****Définition**

Un nombre décimal b est écrit sous forme scientifique lorsque :

$$b = a \times 10^n,$$

où

$$1 \leq a < 10$$

et n est un entier relatif.

$a \times 10^n$ est la notation scientifique, ou écriture scientifique, de b .

Exemple

$$712000 = 7,12 \times 10^5.$$

Donc $7,12 \times 10^5$ est la notation scientifique de 712000.

$$0,0234 = 2,34 \times 10^{-2}.$$

Donc $2,34 \times 10^{-2}$ est la notation scientifique de 0,0234.

05**Propriétés des puissances****Produit de deux puissances de même base****Règle**

Le produit de deux puissances de même base est une puissance de même base dont l'exposant est la somme des exposants.

Pour $a \neq 0$ et n, p entiers naturels :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}.$$

Exemple

$$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5,$$

$$(-7)^3 \times (-7)^5 = (-7)^8,$$

$$3,14 \times (3,14)^6 = (3,14)^7.$$

Puissance d'un produit**Règle**

La puissance d'un produit est égale au produit des puissances.

Pour a et b non nuls :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

et

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

Exemple

$$(-5 \times 7)^4 = (-5)^4 \times 7^4,$$

$$(5 \times x)^9 = 5^9 \times x^9,$$

$$(10^2)^4 = 10^8,$$

$$[(-5)^3]^7 = (-5)^{21}.$$

06**Calcul avec les puissances****Exemple**

Calculer :

$$E = 8 - 3 \times (-2)^3.$$

On commence par la puissance :

$$E = 8 - 3 \times (-8) = 8 + 24 = 32.$$

Exemple

Simplifier :

$$F = x \times 6 \times x \times x \times (-2) \times x$$

et

$$G = 24 \times 5 \times 2^2 \times 5^5.$$

On obtient :

$$F = -12x^4$$

et

$$G = 10^6.$$

Exemple

Simplifier :

$$H = 2^3 \times (5x)^2 \times (3x^2)^3.$$

Alors :

$$H = 2^3 \times 5^2 \times 3^3 \times x^{2+6} = 5400x^8.$$

07

Comparaison et priorité de calcul

Exemple

Comparer :

$$(2+3)^3 \quad \text{et} \quad 2^3 + 3^3.$$
$$(2+3)^3 = 125, \quad 2^3 + 3^3 = 35.$$

Donc :

$$(2+3)^3 > 2^3 + 3^3.$$

Exemple

Soit :

$$E = x^3 - 2x^2 - x + 1.$$

Pour $x = -3$:

$$E = (-3)^3 - 2(-3)^2 - (-3) + 1 = -27 - 18 + 3 + 1 = -41.$$

08

Écriture scientifique

Exemple

Écrire sous forme scientifique :

$$A = 5 \times 10^3 - 2 \times 10^2,$$
$$B = 64,5 \times 10^8 + 631 \times 10^7.$$

Pour A :

$$A = 5000 - 200 = 4800 = 4,8 \times 10^3.$$

Pour B :

$$B = 64,5 \times 10^8 + 63,1 \times 10^8 = 127,6 \times 10^8 = 1,276 \times 10^{10}.$$