

15

Quadrilatères particuliers

Reconnaître le rectangle, le losange et le carré, et utiliser leurs propriétés.

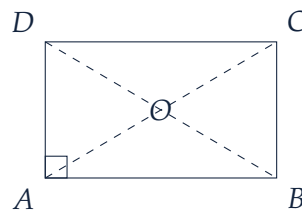
01

Rectangle

Définition 1

Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit.

Autrement dit, si $ABCD$ est un parallélogramme et $\widehat{DAB} = 90^\circ$, alors $ABCD$ est un rectangle.



Propriété 1

Les quatre angles d'un rectangle $ABCD$ sont droits.
 Un rectangle possède toutes les propriétés d'un parallélogramme.
 Les médiatrices des côtés d'un rectangle sont ses axes de symétrie.
 L'intersection des diagonales d'un rectangle est son centre de symétrie.

Propriété 2

Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

Autrement dit, si $ABCD$ est un rectangle, alors :

$$AC = BD.$$

Propriété 3

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

Autrement dit, si $ABCD$ est un parallélogramme et $AC = BD$, alors $ABCD$ est un rectangle.

02

Losange

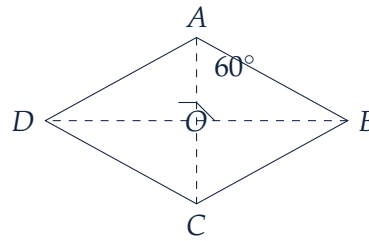
Définition 2

Un losange $ABCD$ est un parallélogramme dont les quatre côtés sont de même longueur.

Propriété 4

Un losange $ABCD$ est un parallélogramme, donc il possède toutes les propriétés d'un parallélogramme.
 Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
 Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors c'est un losange.
 Les diagonales d'un losange sont ses axes de symétrie.
 L'intersection des diagonales d'un losange est son centre de symétrie.



03

Carré

Définition 3

Un carré $ABCD$ est un quadrilatère ayant ses angles droits et ses côtés de même longueur.

Remarque

Un carré est à la fois un rectangle et un losange.
 Donc, il possède toutes les propriétés du rectangle et du losange.

04

Construire un rectangle, un losange ou un carré à partir des diagonales

Construire un rectangle $ABCD$ tel que $AC = 6$ cm

On utilise la propriété : dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur et le même milieu.

1. tracer un segment $[AC]$ tel que $AC = 6$ cm et placer son milieu O ;
2. tracer un segment $[BD]$ tel que $BD = 6$ cm, de milieu O ;
3. tracer le quadrilatère $ABCD$.

Construire un losange $ABCD$ tel que $AC = 3$ cm et $BD = 4$ cm

On utilise la propriété : dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu.

1. tracer un segment $[AC]$ tel que $AC = 3$ cm et placer son milieu O ;
2. tracer la perpendiculaire à (AC) en O , puis placer B et D sur cette droite tels que $BD = 4$ cm et O soit le milieu de $[BD]$;
3. tracer le quadrilatère $ABCD$.

Construire un carré $ABCD$ tel que $AC = 5$ cm

1. tracer deux droites perpendiculaires sécantes en O ;
2. tracer un cercle de centre O et de rayon $2,5$ cm : il coupe les deux droites en A , B , C et D ;
3. tracer le quadrilatère $ABCD$.

05

Déterminer la nature d'un quadrilatère

Exemple

$ABCD$ est un losange.

Soit M et N deux points de $[AC]$ tels que $AM = CN$.

1. Faire une figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $BMDN$? Justifier.

Construction de la figure.

Nature de $BMDN$.

Soit O le centre du losange $ABCD$.

D'où O est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

On a :

$$OA = OC$$

(car O est le milieu de $[AC]$ et M est un point de $[OA]$ et N est un point de $[OC]$).

D'où :

$$AM + MO = ON + NC.$$

Or $AM = CN$ (d'après les données), donc :

$$MO = ON,$$

et comme M , O et N sont des points alignés, alors $[MN]$ et $[BD]$ ont même milieu O .

Donc $BMDN$ est un parallélogramme.

Par ailleurs :

$$(AC) \perp (BD)$$

($[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du losange $ABCD$ et M est un point de $[AC]$ et N est un point de $[AC]$).

D'où :

$$(MN) \perp (BD).$$

Conclusion. $BMDN$ est un losange.

