

2 APIC ■ Semestre 2 ■ Activités numériques

15

Ordre des nombres rationnels et opérations

Comparer deux nombres rationnels, puis utiliser les règles qui relient l'ordre des nombres rationnels à l'addition et à la multiplication.

01

Comparaison de deux nombres rationnels

Règle 1

a et b sont deux nombres rationnels.

$$a \leq b \text{ signifie que : } b - a \geq 0.$$

1 ^{er} membre	$a \leq b$	2 ^e membre
Inférieur ou égal		Une inégalité

Remarque

- $a \leq b$ signifie que : $b \geq a$.
- Pour comparer deux nombres a et b , on peut déterminer le signe de $b - a$ ou celui de $a - b$.

Exemple

1) Comparons les nombres : $a = \frac{9}{28}$ et $b = \frac{5}{14}$.

$$b - a = \frac{5}{14} - \frac{9}{28} = \frac{5 \times 2}{14 \times 2} - \frac{9}{28} = \frac{10}{28} - \frac{9}{28} = \frac{1}{28} > 0$$

$$\text{ainsi : } \frac{5}{14} - \frac{9}{28} > 0 \quad \text{donc : } \frac{5}{14} > \frac{9}{28}.$$

2) x et y sont deux nombres rationnels. Comparons $(x + y)^2$ et $4xy$.

$$\begin{aligned} (x + y)^2 - 4xy &= x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

Puisque $(x - y)^2 \geq 0$, alors $(x + y)^2 - 4xy \geq 0$.

D'où : $(x + y)^2 \geq 4xy$.

02

Inégalité, addition et soustraction

Règle 2

Si on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de l'inégalité.

Autrement dit : a , b et c sont des nombres rationnels.

- Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.
- Si $a \leq b$, alors $a - c \leq b - c$.

Exemple

Soit a un nombre rationnel.

- 1) Si $a < 7$, alors $a + 3 < 7 + 3$; donc : $a + 3 < 10$.
- 2) Si $a + 4 > 9$, alors $a + 4 - 4 > 9 - 4$; donc : $a > 5$.

Règle 3

Si on additionne membre à membre les membres de deux inégalités de même sens, on ne change pas le sens de l'inégalité.

Autrement dit : a , b , c et d sont des nombres rationnels.

Si $a \leq c$ et $b \leq d$, alors $a + b \leq c + d$.

Exemple

Soit a et b deux nombres rationnels tels que : $a \leq 5$ et $b \leq 6$.
Alors : $a + b \leq 5 + 6$ et donc : $a + b \leq 11$.

03

Inégalité et multiplication

Règle 4

Si on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif non nul, on ne change pas le sens de l'inégalité.

Autrement dit : a , b et c sont des nombres rationnels.

- Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Règle 5

Si on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif non nul, on change le sens de l'inégalité.

Autrement dit : a , b et c sont des nombres rationnels.

- Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $ac \geq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Exemple

Soit x un nombre rationnel tel que : $x \leq -3$.

Alors : $4x \leq 4 \times (-3)$ et $\frac{x}{-6} \geq \frac{-3}{-6}$ (car $4 > 0$ et $-6 < 0$)

C'est-à-dire : $4x \leq -12$ et $-\frac{x}{6} \geq \frac{1}{2}$.

Règle 6

On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités de même sens et dont les membres sont tous **positifs**.

Autrement dit : a, b, c et d sont des nombres rationnels positifs.

Si $a \leq c$ et $b \leq d$, alors : $ab \leq cd$.

Exemple

Soit x et y deux nombres rationnels positifs tels que : $x \leq \frac{1}{2}$ et $y \leq \frac{4}{7}$.

Alors : $xy \leq \frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$ c'est-à-dire : $xy \leq \frac{2}{7}$.

04 Encadrement d'un nombre rationnel

Définition

a, b et c sont des nombres rationnels.

Si $a \leq b$ et $b \leq c$, on écrit $a \leq b \leq c$.

L'écriture « $a \leq b \leq c$ » est appelée **encadrement** de b .

Exemple

$1 < \frac{13}{11} < 2$ est un encadrement de $\frac{13}{11}$.