

3 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités numériques

07

Ordre et opérations

Comparer deux nombres réels et utiliser les propriétés de l'ordre avec l'addition, la multiplication, l'inverse, le carré et la racine carrée.

01

Comparaison de deux nombres réels

Définition

Soit a et b deux nombres réels, $a \leq b$ signifie que : $a - b \leq 0$.

Exemple : Comparons les nombres : $3\sqrt{2} - 5$ et $\sqrt{2} - 7$.

On a :

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} - 7) - (3\sqrt{2} - 5) &= \sqrt{2} - 7 - 3\sqrt{2} + 5 \\ &= -2 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Or : $-2 - 2\sqrt{2}$ est un nombre négatif,

$$\text{alors : } (\sqrt{2} - 7) - (3\sqrt{2} - 5) < 0$$

Donc : $\sqrt{2} - 7 < 3\sqrt{2} - 5$.

Remarque 1

Pour comparer deux nombres réels, on peut déterminer le signe de leur différence.

02

Ordre et addition

Propriété 1

Soit a , b et c des nombres réels, $a \leq b$ signifie que : $a + c \leq b + c$.

Exemples :

- 1) Si $x < 8$, alors $x + 2 < 8 + 2$, soit $x + 2 < 10$.
- 2) Si $x + 9 < 2$, alors $x + 9 - 9 < 2 - 9$, soit $x < -7$.

03

Ordre et multiplication

Propriété 2

Soit a , b et c des nombres réels.

- 1) Si $(a \leq b \text{ et } k > 0)$, alors $ka \leq kb$.
- 2) Si $(a \leq b \text{ et } k < 0)$, alors $ka \geq kb$.
- 3) a , b , x , y sont des nombres réels positifs.
Si $a \leq x$ et $b \leq y$, alors : $ab \leq xy$.

Exemples :

- 1) Si $x \leq -3$, alors $4 \times x \leq 4 \times (-3)$, soit $4x \leq -12$.
- 2) Si $-\frac{7}{6}x > \frac{12}{5}$, alors $-\frac{6}{7} \times -\frac{7}{6}x < -\frac{6}{7} \times \frac{12}{5}$, soit $x < -\frac{72}{35}$.

Remarque 2

$a \leq b$ signifie que : $-b \leq -a$.

04**Ordre et inverse****Propriété 3**

Soit a , b et c des nombres réels strictement positifs.

$$a \leq b \text{ signifie que : } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

Exemple : Si $\frac{1}{x} < \frac{2}{3}$, alors $x > \frac{3}{2}$.

05**Ordre et carré****Propriété 4**

Soit a , b et c des nombres réels positifs.

$$a \leq b \text{ signifie que } a^2 \leq b^2.$$

$$a \leq b \text{ signifie que } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

Exemple : Comparons les nombres positifs $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$.

On a : $(5\sqrt{2})^2 = 50$ et $(4\sqrt{3})^2 = 48$.

Donc : $(4\sqrt{3})^2 < (5\sqrt{2})^2$.

D'où : $4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$.

06**Racine carrée du carré d'un réel****Propriété 5**

Soit x un nombre réel.

1) Si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x^2} = x$.

2) Si $x \leq 0$, alors $\sqrt{x^2} = -x$.

Exemple : $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$ car $\sqrt{3} < 2$.

07**À retenir**

À retenir

$a \leq b$ équivaut à $a - b \leq 0$.

- On peut ajouter le même nombre aux deux membres d'une inégalité.
- On peut multiplier les deux membres par un même nombre :
 - positif : l'ordre est conservé ;
 - négatif : l'ordre est changé.
- Pour a et b strictement positifs : $a \leq b \iff \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
- Pour a et b positifs : $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.
- Pour tout réel x : si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x^2} = x$, et si $x \leq 0$ alors $\sqrt{x^2} = -x$.