

05

Théorème de Pythagore

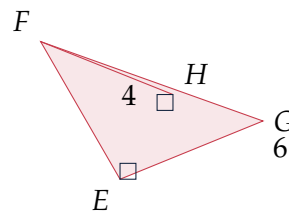
Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque pour calculer des longueurs et démontrer qu'un triangle est rectangle, et reconnaître un triangle non rectangle.

01

Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs

Exemple 1 — Calculer EF

EFG est un triangle rectangle en E et $[EH]$ sa hauteur tels que : $EH = 4$ et $EG = 6$.
Calculer EF .

**Calculons HG**

EGH est un triangle rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} HG^2 &= EG^2 - EH^2 \\ HG^2 &= 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20. \end{aligned}$$

Donc $HG = 2\sqrt{5}$ car $HG > 0$.

Calculons EF de deux façons différentes :

- EFG est un triangle rectangle en E .

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EF^2 &= FG^2 - EG^2 \\ EF^2 &= (FH + HG)^2 - EG^2 \\ EF^2 &= (FH + 2\sqrt{5})^2 - 6^2 \\ EF^2 &= FH^2 + 4\sqrt{5}FH + 20 - 36 \\ EF^2 &= FH^2 + 4\sqrt{5}FH - 16 \end{aligned} \tag{1}$$

- EFH est un triangle rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EF^2 &= FH^2 + EH^2 \\ EF^2 &= FH^2 + 16 \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) et (2), on déduit que :

$$EF^2 = FH^2 + 4\sqrt{5}FH - 16 = FH^2 + 16 \quad \text{et} \quad 4\sqrt{5}FH = 32.$$

$$\text{D'où : } FH = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Il en résulte que :

$$EF^2 = \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 16 = \frac{64}{5} + \frac{80}{5} = \frac{144}{5}$$

Donc : $EF = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ car $EF > 0$.

02

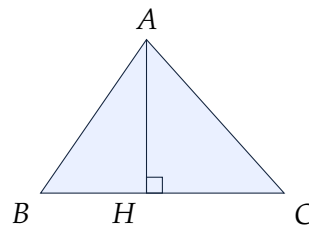
Utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer l'orthogonalité

Exemple 2 — Montrer que ABC est un triangle rectangle

ABC est un triangle et $[AH]$ sa hauteur relative au côté $[BC]$ tels que :

$$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2.$$

Montrer que ABC est un triangle rectangle.



On sait que : ABH et ACH sont deux triangles rectangles en H .

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad \text{et} \quad AC^2 = AH^2 + CH^2$$

alors :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2 \\ 2AH^2 + BH^2 + CH^2 &= BC^2 \end{aligned}$$

Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en A .

03

Reconnaître un triangle non rectangle

Exemple 3 — Montrer que le triangle STU n'est pas rectangle

STU est un triangle tel que : $TS = 14$ cm , $SU = 19$ cm et $TU = 13$ cm.

Montrer que le triangle STU n'est pas rectangle.

- $[SU]$ est le côté le plus long : $SU^2 = 19^2 = 361$
- $TS^2 + TU^2 = 14^2 + 13^2 = 196 + 169 = 365$

Donc : $SU^2 \neq TS^2 + TU^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle STU n'est pas rectangle.

04

À retenir

À retenir

Théorème de Pythagore. Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Réciproque. Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.

Pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle, on compare le carré de la longueur du plus grand côté à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés : s'ils sont différents, le triangle n'est pas rectangle.