

2 APIC ■ Semestre 2 ■ Activités numériques

09

Calcul littéral

Réduire une expression littérale, développer un produit, factoriser une somme ou une différence et reconnaître les identités remarquables.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

Réduction d'expressions

Exemple 1

Réduire l'expression : $E = 4(x - 2) - 2(x - 1) - 6x$

Correction

$$E = 4(x - 2) - 2(x - 1) - 6x$$

on développe les produits

$$E = (4x - 8) - (2x - 2) - 6x$$

on supprime les parenthèses

$$E = 4x - 8 - 2x + 2 - 6x$$

$$E = 4x - 2x - 6x + 2 - 8$$

on regroupe les termes semblables

$$E = -4x - 6$$

on simplifie

Développement d'un produit

Exemple 2

Développer et réduire l'expression : $F = (3x - 1)(-x^2 + 2x - 4)$

Correction

$$F = (3x - 1)(-x^2 + 2x - 4)$$

$$F = -3x \times x^2 + 3x \times 2x - 3x \times 4 + 2 \times x^2 - 2 \times 2x + 2 \times 4$$

on développe

$$F = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 2x^2 - 4x + 8$$

on effectue les produits

$$F = -3x^3 + 6x^2 + 2x^2 - 12x - 4x + 8$$

on regroupe les termes semblables

$$F = -3x^3 + 8x^2 - 16x + 8$$

on simplifie

Calcul mental et identités remarquables

Exemple 3

Calculer mentalement les nombres suivants : 51^2 ; 68^2 et 77×83 .

Correction

$$51^2 = (50 + 1)^2$$

$$51^2 = 50^2 + 2(50 \times 1) + 1^2$$

$$51^2 = 2500 + 100 + 1$$

$$51^2 = 2601$$

$$68^2 = (70 - 2)^2$$

$$68^2 = 70^2 - 2(70 \times 2) + 2^2$$

$$68^2 = 4900 - 280 + 4$$

$$68^2 = 4624$$

$$77 \times 83 = (80 - 3)(80 + 3)$$

$$77 \times 83 = 80^2 - 3^2$$

$$77 \times 83 = 6400 - 9$$

$$77 \times 83 = 6391$$

Factorisation par début d'une identité remarquable

Exemple 4

Factoriser l'expression : $E = x^2 - 5x + 6$

Correction

Remarque : $a^2 + ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ pour tous nombres rationnels a et b .

Effectivement :

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= a^2 + 2\left(a \times \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= a^2 + ab \end{aligned}$$

$$E = x^2 - 5x + 6$$

$$E = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$E = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4}$$

$$E = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$E = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$E = \left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$E = \left(x - \frac{4}{2}\right)\left(x - \frac{6}{2}\right)$$

Donc : $E = (x - 2)(x - 3)$

Résolution d'un problème

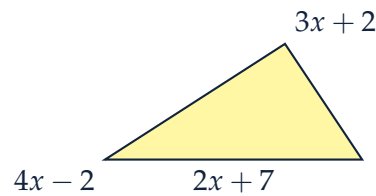
Exemple 5

Les longueurs sont exprimées en mètres ($x > 3$).

Soit p le périmètre du triangle ci-contre.

1) Calculer p en fonction de x .

2) En déduire la valeur du périmètre de ce triangle lorsque $x = 5$.



Correction

1) On sait que le périmètre d'un triangle est égal à la somme des longueurs de ses côtés.

$$p = (4x - 2) + (3x + 2) + (2x + 7)$$

$$p = 4x - 2 + 3x + 2 + 2x + 7$$

$$p = 4x + 3x + 2x - 2 + 2 + 7$$

Donc : $p = 9x + 7$.

2) Calcul de p lorsque $x = 5$.

On a : $p = 9x + 7$ et $x = 5$

Donc : $p = 9 \times 5 + 7$

$$p = 45 + 7$$

$$p = 52.$$

Donc, 52 m est le périmètre de ce triangle, lorsque $x = 5$,

vérification : $(4 \times 5 - 2) + (3 \times 5 + 2) + (2 \times 5 + 7) = 52$.

02

Investissement — Réduire une expression

Exercice 1

Réduire les expressions suivantes :

$$A = 3x^2 - 5x - 6x^2 + 7 - 4x - 2$$

$$B = -a + 3 - 5a + \frac{a}{2} - 5 - a$$

$$C = -8b^2 - \frac{3}{7}b - 10 + \frac{1}{14}b - \frac{1}{28}b + 4b^2$$

Exercice 2

Soit x et y deux nombres rationnels tels que :

$$x + y + 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x + y \neq 0$$

Simplifier l'expression suivante :

$$F = \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) \left(1 - \frac{1}{x+y+1}\right)$$

Exercice 3

Soit x et y deux nombres rationnels non nuls tels que : $x - y \neq 0$ et $x + y \neq 0$.

Simplifier l'expression suivante :

$$F = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} - \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

Exercice 4

a et b sont deux rationnels positifs non nuls et n un entier naturel non nul. Simplifier :

$$E = \frac{a^{2016} + 1 + 2a^{1008}}{a + a^{1009}} \quad \text{et} \quad F = \frac{a^{n+1} + ab}{a^n + b}$$

03

Investissement — Développer

Exercice 5

Développer et réduire :

$$A = 9 - 2(3x - 1)$$

$$B = 3(4x - 5) - (x + 7)$$

$$C = \frac{5}{2}(x - 6) + \frac{3}{4}\left(2x - \frac{1}{6}\right)$$

$$D = \frac{9}{10}\left(1 - \frac{9}{10}\right) \times \frac{9}{10} \times \frac{9^3}{1000}$$

$$E = (5 + 6x)(x - 2)$$

$$F = (-5x + 3)(3x + 1)$$

Exercice 6

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x - 1)(x + 4) - (x - 3)(2x + 1)$$

$$B = (-x + 5)(3x - 2) - 4(x - 1)(x + 2)$$

$$C = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

$$D = (t + t^3 - 1)(t^4 - 2t + t^2)$$

Exercice 7

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = -3(-a + 2b) - 2a - 4(a - 3b) + a(2 - b)$$

$$B = (5 + a)(a - 3) - 4(a - 1) - (a + 3)(a - 5)$$

$$C = -(3a + 2) - 4(a - b) + 4b - a(b + 2)$$

Exercice 8

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$a = (3 + x)^2 ; \quad b = (x - 3)^2 ; \quad c = (8x - 5)(8x + 5)$$

$$d = \left(\frac{4a}{7} + 1\right) \left(\frac{4a}{7} - 1\right) ; \quad e = \left(\frac{2a}{9} - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$f = \left(1,2x + \frac{3}{4}\right)^2 ; \quad g = (10^3x - 10)^2$$

$$h = (x + 10^4)^2$$

Exercice 9

Développer et réduire les expressions littérales suivantes :

$$A = (x - 4)^2 - x + 2(3x - 1)$$

$$B = (2x + 3)^2 - (4x - 5)(4x + 5)$$

$$C = (3x - 1)^2 - 2(x + 3)^2$$

$$D = (4x - 1)(4x + 1) + (x + 4)^2 - (2x - 1)^2$$

$$E = (x - 1)^2 - 2(x - 1)(6x + 1) + (6x + 1)^2$$

$$F = (2x^2 - x + 1)(3x - 2)$$

$$G = (x^2 - 3x + 2)^2$$

$$H = (2x - 1)^3$$

Exercice 10

1) Développer et réduire E :

$$E = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2$$

2) En déduire l'écriture du nombre 509 sous la forme d'une somme de trois carrés.

Exercice 11

1) Développer et réduire : $F = (a + 4)^2 - (a - 4)^2$.

En déduire le calcul de $10004^2 - 9996^2$ sans utiliser la calculatrice.

04**Investissement — Factorisation****Exercice 12**

Factoriser les expressions suivantes :

$$a = 7x + 7 ; \quad b = 18x - 24$$

$$c = 27x^2 - 14x ; \quad d = 9x^3 + 36x^2 - 18$$

$$e = x^2y + xy^2 - xy ; \quad f = \frac{5}{3}xy + \frac{10}{9}y + \frac{30}{18}y^2$$

Exercice 13

Factoriser les écritures proposées :

$$A = -2(a + b) + c(a + b)$$

$$B = 5a(4x - 1) - b(4x - 1)$$

$$C = (x - 8)(3x - 1) + (x - 8)(2x + 3)$$

$$D = \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)(3 - x) - (3 - x)\left(\frac{3x}{4} + \frac{7}{2}\right)$$

$$E = (6x + 1)^2 - 4(6x + 1)$$

Exercice 16

1) Factoriser les expressions suivantes :

$$x^2 + 6x + 9 ; \quad 64x^2 + 16x + 1 ; \quad x^4 - 8x^2 + 16 ;$$

$$81x^2 - 49y^2 ; \quad \frac{x^2}{4} - 3x + 9 ; \quad \frac{9}{25}x^2 - 100$$

$$9x^2 - (5x + 1)^2 ; \quad (3x + 1)^2 - (5x - 1)^2 ; \quad (4x - 5)^2 - 9(x - 1)^2$$

2) Factoriser les expressions littérales demandées en s'aidant de la fonction : Factoriser (< Polynôme >).

Exercice 17

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 16x^2 - 9 + (4x - 3)(x - 2)$$

$$B = (3x + 2)^2 - (6x + 4) + 9x^2 + 12x + 4$$

$$C = 100x^2 - 100x + 25 - (6x - 3)(2x + 1)$$

Exercice 18

Soit x un nombre rationnel. On donne :

$$A = 81x^2 - 49 - (9x + 7)(3x - 3)$$

- 1) Développer et réduire A .
- 2) Factoriser A .
- 3) Calculer A pour $x = -\frac{3}{2}$.

05**Investissement — Identités remarquables****Exercice 19**

Soit x un nombre rationnel. On donne :

$$B = (10 - 5x)(5x + 6) + (5x - 10)(4x - 1)$$

- 1) Développer et réduire B .
- 2) Factoriser B .
- 3) Calculer B pour $x = \frac{5}{4}$.

Exercice 20

Soit x un nombre rationnel. On donne :

$$C = (5x - 1)(2x - 3) - (2x - 3)^2$$

- 1) Développer et réduire C .
- 2) Factoriser C .
- 3) Calculer C pour $x = -\frac{1}{3}$.

Exercice 21

Soit x un nombre rationnel. On donne :

$$D = (2x - 5)(-3x + 3) - 20x + 4x^2 + 25$$

- 1) Développer et réduire D .
- 2) Factoriser D .
- 3) Calculer D pour $x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 22

Compléter :

$$\begin{aligned} x^2 + \dots + 16 &= (\dots + \dots)^2 \\ x^2 - 6x + \dots &= (\dots - \dots)^2 \\ x^2 + 10x + \dots &= (x + \dots)^2 \\ \dots x^2 + \dots + 49 &= (2x + \dots)^2 \\ x^2 - x + \dots &= (x - \dots)^2 \\ \dots + 30x + 9 &= (5x + 3)^2 \\ \dots - 5x + 1 &= (\dots - \dots)^2 \end{aligned}$$

Exercice 23

Calculer le plus simplement possible sans utiliser la calculatrice.

$$\begin{aligned} 28 \times 32 ; \quad 59999^2 ; \quad 9,99^2 \\ 15,01 \times 14,99 ; \quad 100 \times 10^2 ; \quad 501 \times 499. \end{aligned}$$

Exercice 24

Sans utiliser la calculatrice, montrer que :

$$(999999)^2 + (2000)^2 = (1000001)^2$$

Exercice 25

1) Montrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a. \quad 4x^2 - 24x + 43 &= 4(x - 3)^2 + 7 \\ b. \quad 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} &= (2x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

- 2) a. Vérifier que : $x^2 - 5x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
 b. En déduire la forme factorisée de l'expression :

$$x^2 - 5x - 14.$$

06

Investissement — Calculatrice

Exercice 14

Relier par une flèche chaque expression de la première colonne à sa forme factorisée de la deuxième colonne.

$(5x - 2)(2x + 5) - 5x + 2$	• • $2(2x + 7)(1 - 6x)$
$(5x + 3)(x - 1) + 10x + 6$	• • $(5x - 1)(x + 1)$
$3x(5x - 1) + (1 - 5x)(2x - 1)$	• • $(3x - 2)(-x + 3)$
$(2x + 1)(3x - 2) - (2 - 3x)^2$	• • $2(5x - 2)(x + 2)$
$(4x + 14) - 4x(6x + 21)$	• • $(5x + 3)(x + 1)$

Exercice 15

- a. Quelle valeur affiche la calculatrice pour le calcul de $A = 345678901^2 - 345678900 \times 345678902$?
 (Sur la plupart des machines on trouve $A = 0$ mais sur certaines on trouve 1.)
 b. x étant un nombre réel quelconque, développer l'expression : $x^2 - (x - 1)(x + 1)$.
 En posant : $x = 345678901$, quel calcul fait-on en effectuant $x^2 - (x - 1)(x + 1)$?
 Conclure sur la valeur exacte de A .
 1) Développer et réduire : $G = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 6)$.
 En déduire le calcul de $9997^2 - 9999 \times 9994$.

07

Investissement — Mon bilan

- 1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :

Exercice B1

L'expression réduite de $1 + 3x^2 - 4x + 7x^2 + 9x - 3$ est : ...

$$A : 4x^2 + 5x - 2, \quad B : 10x^2 - 5x - 2, \quad C : 10x^2 + 5x - 2.$$

Exercice B2

L'expression $-\frac{3}{2}(x - 8)$ est égal à : ...

$$A : -\frac{3}{2}x + 12, \quad B : -\frac{3}{2}x - 12, \quad C : \frac{3}{2}x - 12.$$

Exercice B3

L'expression $(3x - 5)(-2x + 4)$ est égale à : ...

$$A : -6x^2 - 20, \quad B : -6x^2 - 22x - 20, \quad C : -6x^2 + 22x - 20.$$

Exercice B4

L'expression $-4x + 3$ est égale à : ...

$$A : -4 \left(x - \frac{3}{4} \right), \quad B : 4 \left(x + \frac{3}{4} \right), \quad C : -4(x - 12).$$

Exercice B5

L'expression $5x^2 - 10x$ est égale à : ...

$$A : 5(x - 2), \quad B : 5x(x + 2), \quad C : 5x(x - 2).$$

Exercice B6

L'expression $(2x - 1)^2$ est égale à : ...

$$A : 2x^2 - 4x + 1, \quad B : 4x^2 - 4x + 1, \quad C : 4x^2 - 1.$$

Exercice B7

L'expression $(x + 2)^2$ est égale à : ...

$$A : x^2 + 4x + 4, \quad B : x^2 + 4, \quad C : x^2 - 4x + 4.$$

Exercice B8

L'expression $25x^2 - 9$ est égale à : ...

$$A : (5x - 9)(5x + 9), \quad B : (5x - 3)(2x + 3), \quad C : (5x - 3)(5x + 3).$$

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Définition 2	
Ex : 2	Propriété 1	
Ex : 3	Propriété 1	
Ex : 4	Définition 4	
Ex : 5	Définition 4	
Ex : 6	Propriété 2	
Ex : 7	Propriété 2	
Ex : 8	Propriété 2	

3) Exercices pour la remédiation voir R9 page : 198.

08**Approfondissement — Problèmes ouverts****Exercice 26**

1) Lorsque n est un entier, $2n$ est un nombre pair.

Montrer que le produit de deux nombres pairs est un nombre pair.

2) Lorsque n est un entier, $2n + 1$ est un nombre impair.

Montrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

Exercice 27

Montrer que :

$$\frac{2^{40} + 2^{30}}{2^{22} + 2^{32}} = 2^8.$$

Exercice 28

a et b sont deux nombres rationnels non nuls tels que :

$$a \neq b \quad \text{et} \quad a \neq -b \quad \text{et} \quad \frac{1-a}{b-a} = \frac{1}{b+a}$$

Montrer que : $b = 2 - a$.

Exercice 29

On considère le nombre E :

$$E = (8^{n+1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n+1})^3.$$

- 1) Calculer E pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
- 2) Montrer que E est constant pour tout entier naturel n .

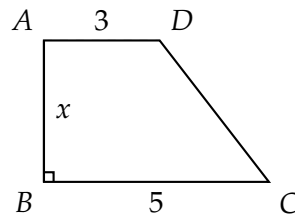
09

Approfondissement — En géométrie

Exercice 30

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.

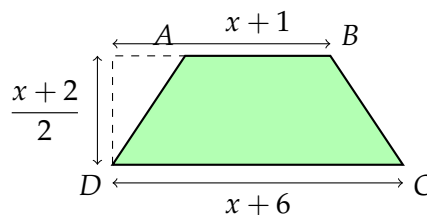
Calculer l'aire du trapèze $ABCD$ pour $x = 2$ et pour $x = 3,5$.



Exercice 31

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.

- 1) Calculer l'aire du trapèze $ABCD$ pour $x = 2$ et pour $x = 3,5$.



- 2) a. Calculer S l'aire du trapèze en fonction de x .
- b. Calculer S de deux manières pour $x = 4$.

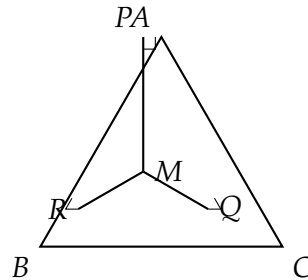
10

Approfondissement — Challenges

Exercice 32

Au XVII^e siècle, un disciple de Galilée, nommé Vincenzo Viviani a démontré un théorème de géométrie qui porte aujourd'hui son nom : « Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés est égale à la hauteur du triangle ».

Démontrer cette propriété en utilisant les triangles équilatéraux sur la figure.



→ Rechercher sur internet les œuvres de Galilée.

Exercice 33

Soit x un nombre rationnel; on donne :

$$H = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$$

Factoriser H .

Exercice 34

Montrer que :

$$\frac{a^{14} - a^{30}}{a^{14} + a^{22}} = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$$

11

Situations proposées au TIMSS

La distance d'arrêt (d) est la distance parcourue par la voiture à partir de l'instant où le conducteur appuie sur la pédale de frein, et celui où la voiture s'arrête complètement.

Cette distance dépend de la vitesse (v) de la voiture lors du freinage.

La formule donnant cette distance est : $d = \frac{2v + v^2}{20}$.

Quelle est la distance d'arrêt pour une vitesse $v = 20$ m/s ?