

07

Droites remarquables dans un triangle

Connaître les médiatrices, les hauteurs, les médianes et les bissectrices d'un triangle ainsi que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle inscrit.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

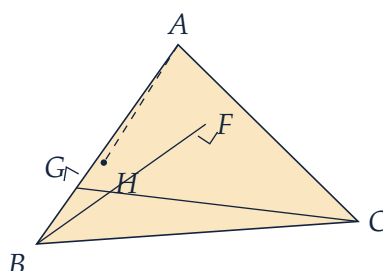
Pratique — J'applique

Utilisation de l'orthocentre

Exemple 1

On considère la figure ci-contre :

Construire la perpendiculaire à (BC) passant par A en utilisant uniquement une règle non graduée.



Correction

Désignons par H le point d'intersection des droites (BF) et (CG) .

$(BF) \perp (AC)$ et $(CG) \perp (AB)$

(BF) et (CG) sont deux hauteurs de ABC .

Donc, le point H est l'orthocentre du triangle ABC .

Il en résulte que (AH) est la hauteur relative au côté $[BC]$.

Donc : $(AH) \perp (BC)$.

Conclusion : on trace, à l'aide d'une règle non graduée, les droites (AH) et (BC) .

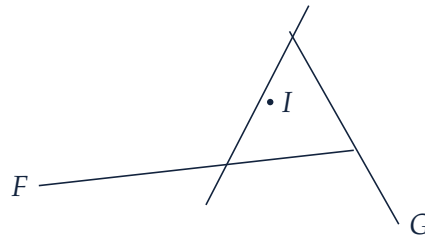
Utilisation du cercle inscrit

Exemple 2

On considère la figure ci-contre :

Construire le point E tel que :

I soit le centre du cercle inscrit dans le triangle EFG .



Correction

Soit I le centre de cercle inscrit dans le triangle EFG

Soit G' le symétrique de G par rapport à la droite (FI) .

Ainsi le symétrique de l'angle $\widehat{GFI}$ est l'angle $\widehat{G'FI}$.

Donc $[FI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{GFG'}$.

Soit F' le symétrique de F par rapport à la droite (GI) .

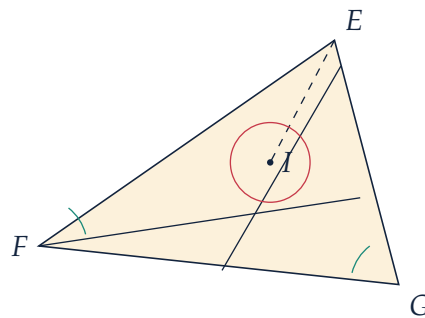
Ainsi le symétrique de l'angle $\widehat{GFI}$ est l'angle $\widehat{GF'I}$.

Donc $[GI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FGF'}$.

Désignons par E le point d'intersection des droites (FG') et (GF') .

Il en résulte que $[GI)$ et $[FI)$ sont deux bissectrices dans le triangle EFG .

Donc, I est le centre du cercle inscrit dans le triangle EFG .

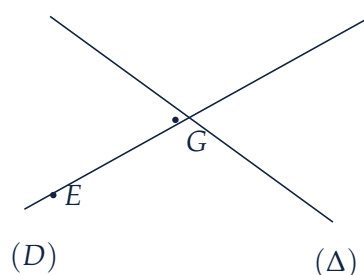


Utilisation du centre de gravité

Exemple 3

On considère la figure ci-contre :

Construire M sur (Δ) et N sur (D) tels que (Δ) et (D) soient deux médianes du triangle MEN .



Correction

On sait que (D) et (Δ) sont deux médianes de MEN , donc G est le centre de gravité de MEN .

Soit O un point de (EG) tel que : $EG = \frac{2}{3}EO$.

Soit G' le symétrique de G par rapport à O .

Traçons (D') la parallèle à (D) passant par G' .

Traçons (Δ') la parallèle à (Δ) passant par G' .

(D') coupe (Δ) en M et (Δ') coupe (D) en N .

Démonstration :

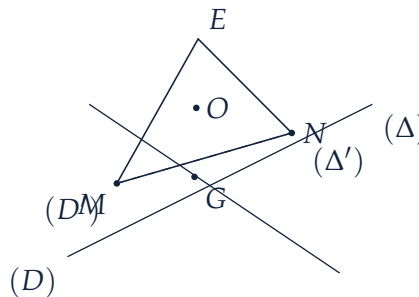
On a : $(MG) \parallel (NG')$ et $(MG') \parallel (NG)$.

$MGNG'$ est un parallélogramme.

Or O est le milieu de $[GG']$ (car G' est le symétrique de G par rapport à O), alors O est le milieu de $[MN]$.

Il en résulte que (EO) est une médiane de MEN .

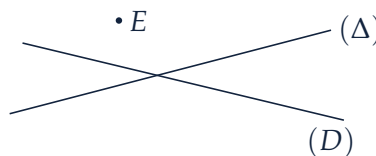
Et comme : $EG = \frac{2}{3}EO$, alors G est le centre de gravité de MEN .



Utilisation du centre du cercle circonscrit

Exemple 4

Construire les points F et G sachant que (D) et (Δ) sont deux médiatrices du triangle EFG .



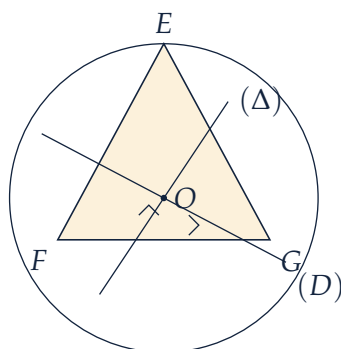
Correction

Soit O le point d'intersection de (D) et (Δ) .

Comme (D) et (Δ) sont deux médiatrices du triangle EFG , alors O est le centre du cercle (C) circonscrit de EFG .

- On construit le cercle (C) de centre O et de rayon OE .
- La perpendiculaire à la droite (Δ) passant par E coupe (C) en F .
- La perpendiculaire à la droite (D) passant par E coupe (C) en G .

On obtient ainsi la construction demandée.



02

Investissement — Je m'entraîne

Réviser le cours

Exercice 1

Observer la figure suivante :

Compléter les phrases :

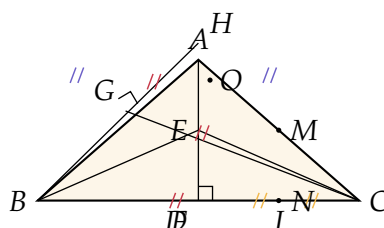
L'orthocentre de ABC est ...

L'orthocentre de CAF est ...

... est le centre de gravité de DFC .

... est le milieu de $[CF]$.

Le centre du cercle circonscrit de BDG est ...



Avec TICE

Exercice 2

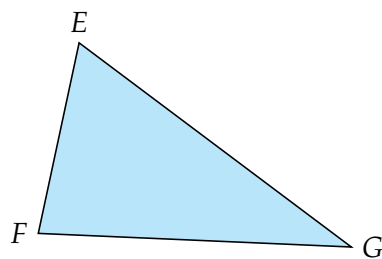
1) Recopier la figure suivante :

2) Tracer :

- la médiane $[FM]$
- la médiatrice de $[EG]$
- la hauteur $[GH]$.
- la bissectrice de l'angle $\widehat{EGF}$.

3) s'aider du logiciel *Geogebra* pour tracer la médiane, la médiatrice, la hauteur et la bissectrice en utilisant les icônes suivants :

Polygone	Milieu	Droite	Médiatrice	Bissectrice
----------	--------	--------	------------	-------------



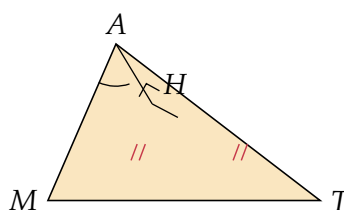
Cercle inscrit / bissectrices

Exercice 3

ABC est un triangle tel que :
 $\widehat{ABC} = 80^\circ$ et $\widehat{BAC} = 50^\circ$ et $AB = 6$ cm.
 Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) .
 La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe (CH) en P .
 Montrer que $[AP)$ est la hauteur de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 4

On considère la figure suivante :
 Démontrer que $[AH)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{MAT}$.

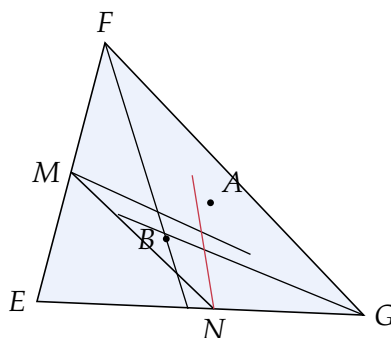


Exercice 5

EFG est un triangle et (C) son cercle circonscrit de centre O .
 $[MI]$ est la hauteur relative au côté $[FG]$ (H un point de $[FG]$).
 $[EM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$.
 $(M$ un point de (C)).
 Déterminer que $[EM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{OEH}$.

Exercice 6

EFG est un triangle.
 M est un point de $[EF]$ et N un point de $[EG]$. Les bissectrices des angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$ se coupent en A . Les bissectrices des angles $\widehat{EMN}$ et $\widehat{ENM}$ se coupent en B .
 Montrer que des points E , B et A sont alignés.



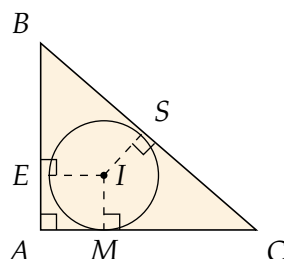
Exercice 7

ABC est un triangle rectangle en A .

Le cercle (C') inscrit dans le triangle ABC est tangent respectivement à (AB) , (AC) et (BC) en E , M et S .

I est le centre de (C') .

Montrer que $AMIE$ est un carré.



Exercice 8

$[EH]$ est la hauteur relative au côté $[FG]$
(H un point de $[FG]$).

$[EM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$
(M un point de (C)).

Démontrer que $[EM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{OEH}$.

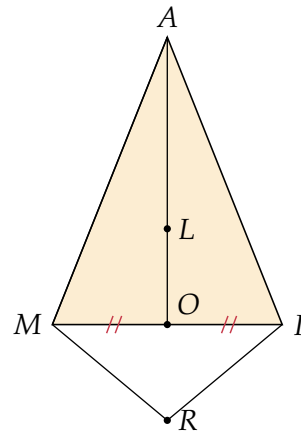
Centre de gravité / médianes

Exercice 9

Dans la figure ci-contre :

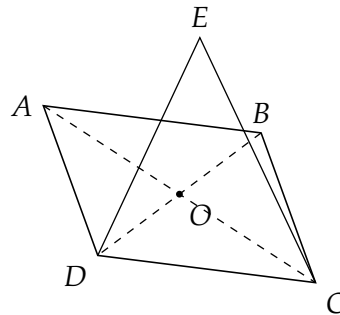
- O est le milieu de $[MI]$.
- L le centre de gravité du triangle MAI .
- $OR = \frac{1}{3} AO$.

Montrer que $MRIL$ est un parallélogramme.



Exercice 10

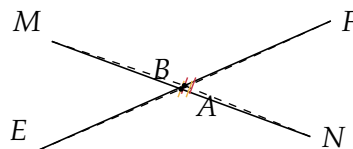
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .
Soit E un point à l'extérieur de $ABCD$.



- 1) Placer le point G centre de gravité du triangle ACE .
- 2) Montrer que G est aussi centre de gravité du triangle DCE .

Exercice 11

$[EF]$ et $[MN]$ sont deux segments.
Soit A le milieu de $[EF]$ et B le milieu de $[MN]$.
Démontrer que les triangles BEF et AMN ont une médiane en commun.



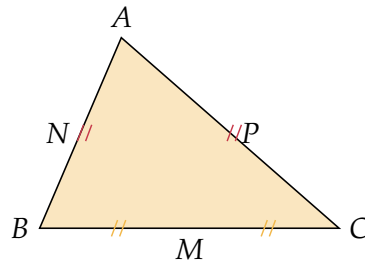
Exercice 12

$DCBA$ est un parallélogramme de centre O .
Soit M le milieu de $[OB]$, E le point d'intersection de (MC) et (AD) et F le symétrique de E par rapport à M .
1) Montrer que (DM) est une médiane de DEF .
2) Soit G le point d'intersection des droites (DE) et (DF) .
Montrer que G est le milieu de $[DF]$.

Exercice 13

ABC est un triangle.

M , N et P sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[BA]$ et $[AC]$.



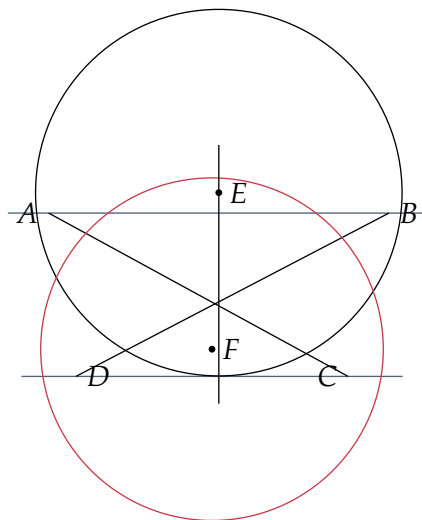
Cercle circonscrit / médiatrices

Exercice 14

Dans la figure ci-contre :

Les droites (AB) et (DC) sont parallèles. E et F sont les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD .

Démontrer que : $(EF) \perp (DC)$.



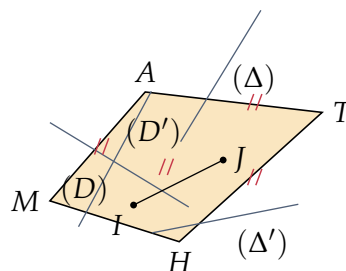
Exercice 15

$MATH$ est un quadrilatère.

La médiatrice (D) de $[MA]$ coupe la médiatrice (D') de $[MH]$ en I .

La médiatrice (Δ) de $[AT]$ coupe la médiatrice (Δ') de $[TH]$ en J .

Montrer que (IJ) est la médiatrice de $[AH]$.

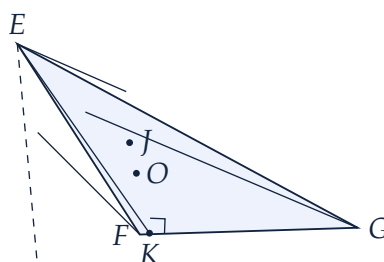


03

Mon bilan

1) Indiquer la bonne réponse par *A*, *B* ou *C* :

Pour les exercices 1 à 7 on utilise la figure ci-contre :



Exercice B1

Les médiatrices d'un triangle sont : ...

A : sécantes

B : parallèles

C : concourantes

Exercice B2

Le centre du cercle circonscrit au triangle *EFG* est : ...

A : *I*

B : *O*

C : *E*

Exercice B3

Le centre du cercle inscrit dans le triangle *EFG* est l'intersection : ...

A : des hauteurs de *EFG*

B : des bissectrices de *EFG*

C : des médianes de *EFG*

Exercice B4

La droite (*AE*) est : ...

A : une médiane de *EFG*

B : une médiatrice de *EFG*

C : une hauteur de *EFG*

Exercice B5

L'intersection des droites (*FJ*) et (*GK*) est : ...

A : le centre du cercle circonscrit au triangle *EFG*

B : le centre du cercle inscrit dans le triangle *EFG*

C : le centre de gravité du triangle *EFG*

Exercice B6

M est le centre de gravité du triangle *EFG* alors : ...

A : $IM = \frac{2}{3} IE$

B : $IM = \frac{1}{3} IE$

C : $IM = IE$

Exercice B7

Les hauteurs d'un triangle sont : ...

A : concourantes

B : parallèles

C : perpendiculaires

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Propriété 1	
Ex : 2	Propriété 1	
Ex : 3	Propriété 2	
Ex : 4	Définition	
Ex : 5	Propriété 4	
Ex : 6	Propriété 5	
Ex : 7	Propriété 3	

3) Exercices pour la remédiation voir R7 page : 198.

Exercice B8

Dans la figure ci-contre :

- O est le milieu de $[MI]$.
- L le centre de gravité du triangle MAI .
- $OR = \frac{1}{3} AO$.

Montrer que $MRIL$ est un parallélogramme.

04

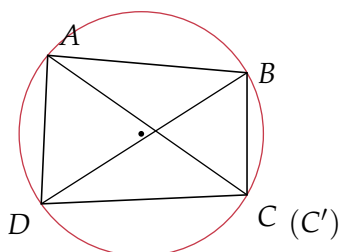
Approfondissement — Je recherche

Cercle circonscrit / médianes

Exercice 16

A, B, C et D sont quatre points d'un cercle (C') .

Montrer que les médiatrices des segments $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD]$ et $[CD]$ sont concourantes.



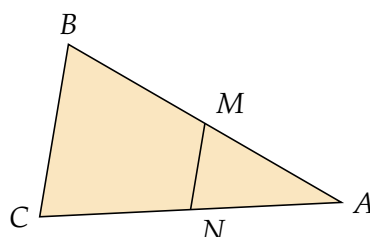
Exercice 17

ABC est triangle.

Soit M un point de $[AB]$.

La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N .

Montrer que les triangles AMN et ABC ont une médiane commune.



05

Problèmes ouverts

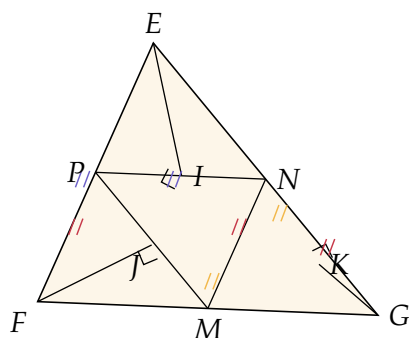
Exercice 18

EFG est un triangle.

M , N et P sont les milieux respectifs de $[FG]$, $[GE]$ et $[EF]$.

Soit I le projeté orthogonal de E sur (PN) , J le projeté orthogonal de F sur (MP) et K le projeté orthogonal de G sur (MN) .

Montrer que les droites (IE) , (FJ) et (GK) sont concourantes.



Exercice 19

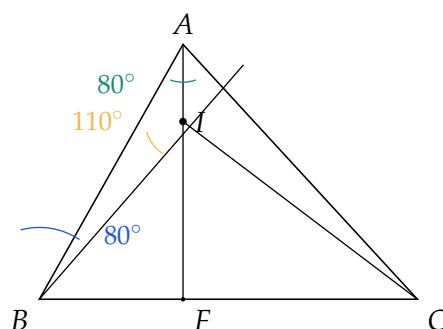
ABC est un triangle.

- 1) Construire les points M , N et P tels que $ABMC$, $ABCN$ et $ACBP$ soient des parallélogrammes.
- 2) Montrer que les droites (AM) , (NB) et (CP) sont concourantes.

Exercice 20

Observer la figure suivante :

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCI}$.



06

Approfondissement — Je recherche

Exercice 21

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O tels que :

$EG = 12$ cm et $FH = 15$ cm.

Soit A le milieu de $[EF]$ et B le point d'intersection de $[HA]$ et $[OE]$. Calculer EB .

Exercice 22

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O .

Soit A le symétrique de F par rapport à H .

1) Montrer que : $3OF = OA$.

2) La droite (GH) coupe $[AE]$ en M et la droite (EH) coupe $[AG]$ en N .

a. Montrer que : $(MN) \parallel (EG)$.

b. Montrer que : $MN = \frac{1}{2} EG$.

Exercice 23

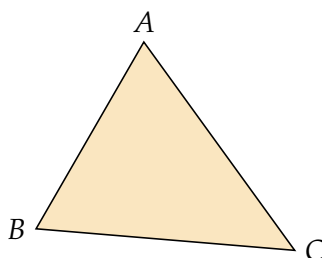
ABC est un triangle.

La perpendiculaire en B à la droite (AB) coupe la droite (AC) en D .

La perpendiculaire en C à la droite (AD) coupe (AB) en E .

Les droites (BD) et (CE) se coupent en F .

Montrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



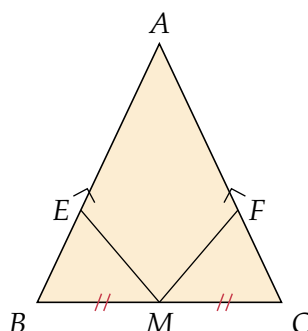
Exercice 24

ABC est un triangle isocèle en A .

Soit M le milieu de $[BC]$.

E et F sont respectivement les projetés orthogonaux de M sur les droites (AB) et (AC) .

Montrer que : $BE = CF$.



Exercice 25

ART est un triangle rectangle en A .

Soit I le projeté orthogonal de A sur (TR) , M est le milieu de $[AI]$ et O le milieu de $[RI]$.

Montrer que : $(TM) \perp (OA)$.

Exercice 26

ABC est un triangle isocèle en A .

Soit M le milieu de $[BC]$.

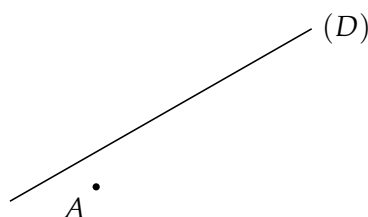
E et F sont respectivement les centres de gravités des triangles MAB et MAC .
Démontrer que (AM) est la médiatrice de $[EF]$.

07

Construction géométrique

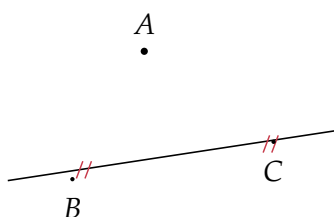
Exercice 27

Construire un triangle ABC tel que (D) en soit une médiane du triangle ABC .



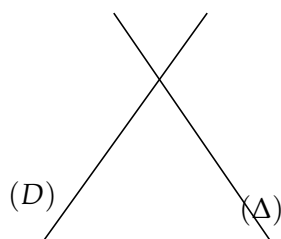
Exercice 28

Construire le point M tel que A est l'orthocentre du triangle MBC .



Exercice 29

Construire un triangle ABC tel que (D) soit une bissectrice et (Δ) une médiane de ABC .

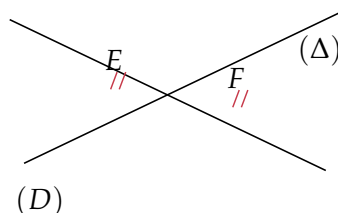


Exercice 30

Construire un triangle ABC tel que :
 $BC = 8 \text{ cm}$, $BE = 9 \text{ cm}$, $CF = 12 \text{ cm}$
où E est le milieu de $[AC]$ et F est le milieu de $[AB]$.

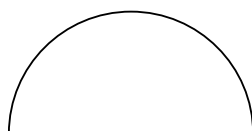
Exercice 31

Construire le point G tel que les droites (D) et (Δ) soient deux médianes du triangle EFG .



Exercice 32

Retrouver le centre de cet arc de cercle.



08

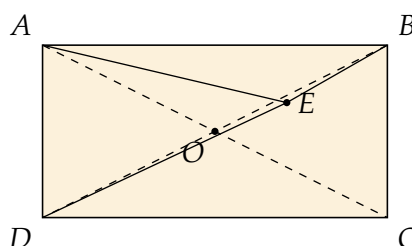
Challenges

Exercice 33

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

Soit E un point à l'intérieur de $ABCD$.

- 1) Montrer que les triangles BDE et ACE ont une médiane en commun.
- 2) Préciser la position des centres de gravité de ces triangles.

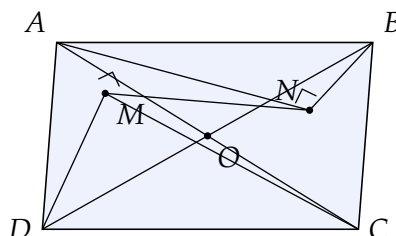


Exercice 34

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

Soit M l'orthocentre du triangle ADC , et N l'orthocentre du triangle BAC .

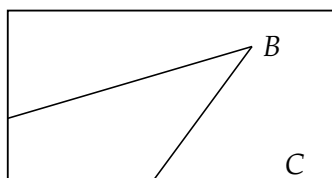
Démontrer que O est le milieu de $[MN]$.



Exercice 35

Le sommet A du triangle ABC est en dehors du cadre.

En ne faisant aucune construction à l'extérieur du cadre, construire le centre de gravité de ce triangle ainsi que la médiane issue de A .



09

Situations proposées au TIMSS

Exercice 36

O est le centre du parallélogramme $ABCD$.

C est le milieu de $[BE]$ et F est le point d'intersection des droites (CD) et (OE) .

On a : $CF = x \times CD$.

Calculer x .

