

2 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités numériques

08

Puissances

Calculer les puissances d'un nombre rationnel non nul, appliquer les propriétés des puissances, déterminer le signe d'une puissance et écrire un nombre décimal en notation scientifique avec son ordre de grandeur.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

Calculer un ordre de grandeur

Exemple 1 — Ordre de grandeur de la hauteur du minaret de la mosquée Hassan II

Quel est l'ordre de grandeur de la hauteur du minaret de la mosquée Hassan II ?

Correction

On sait que sa hauteur est de 210 m.
En écriture scientifique, elle s'écrit $2,1 \times 10^2$.
Puisque 2,1 est inférieur à 5, on l'arrondit à 1.
Donc, l'ordre de grandeur est 1×10^2 m, soit 10^2 .

Exemple 2 — Ordre de grandeur de l'épaisseur d'un cheveu

L'épaisseur d'un cheveu est de 0,06 mm.
Quel est son ordre de grandeur en millimètre ?

Correction

On sait que 0,06 mm s'écrit en notation scientifique 6×10^{-2} mm.
Puisque 6 est supérieur strictement à 5, on l'arrondit à 10.
Donc, l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un cheveu est 10×10^{-2} , soit 10^{-1} .

Respecter les priorités opératoires avec les puissances

Exemple 3 — Calcul avec priorités opératoires

Calculer le nombre :

$$A = 8 - 2 \times 3^2 + (7 - 5)^2.$$

Correction

On sait que la puissance est prioritaire sur la multiplication.

$$A = 8 - 2 \times 3^2 + (7 - 5)^2$$

$$A = 8 + 2 \times 9 + 2^2$$

$$A = 8 - 2 \times 9 + 4$$

La multiplication est prioritaire sur la différence.

$$A = 8 - 18 + 4$$

$$A = 12 - 18$$

$$A = -6.$$

Résoudre des problèmes avec les propriétés d'une puissance**Exemple 4 — Déterminer un entier relatif vérifiant une égalité**

Déterminer le nombre entier relatif x sachant que : $27^{-x} = 3^{-2x} \times 9$.

Correction

Calcul de x .

$$27^{-x} = 3^{-2x} \times 9$$

$$(3^3)^{-x} = 3^{-2x} \times 3^2$$

$$3^{-3x} = 3^{-2x+2}$$

$$-3x = -2x + 2$$

$$-3x + 2x = 2$$

Donc : $x = -2$.

Calcul sur les puissances avec des lettres**Exemple 5 — Simplifier une expression littérale**

Simplifier A en le mettant sous la forme $a^n b^m c^p$, où a , b et c sont des nombres rationnels non nuls et n , m et p sont des entiers relatifs.

$$A = \frac{a^6}{b^3} : \frac{\left[(a^{-2} b^6)^{-3} c^{-4} \right]^{-2}}{\left[a^3 (b^{-2} c^{-4})^3 \right]^2}$$

Correction

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a^6}{b^3} : \frac{\left[(a^{-2}b^6)^{-3} c^{-4} \right]^{-2}}{\left[a^3 (b^{-2}c^{-4})^3 \right]^2} \\
 A &= \frac{a^6}{b^3} : \frac{(a^6 b^{-18} c^{-4})^{-2}}{(a^3 b^{-6} c^{-12})^2} \\
 A &= \frac{a^6}{b^3} : \frac{a^{-12} b^{36} c^8}{a^6 b^{-12} c^{-24}} \\
 A &= \frac{a^6}{b^3} \times \frac{a^6 b^{-12} c^{-24}}{a^{-12} b^{36} c^8} \\
 A &= a^6 b^{-3} a^6 b^{-12} c^{-24} a^{12} b^{-36} c^{-8} \\
 A &= (a^6 a^6 a^{12}) (b^{-3} b^{-12} b^{-36}) (c^{-24} c^{-8})
 \end{aligned}$$

Donc : $A = a^{24} b^{-51} c^{-32}$.

02

Investissement — Puissance relatif

Exercice 1

Calculer les puissances suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} ; \quad (-0,02)^5 ; \quad \left(\frac{7}{19}\right)^{-2} ; \quad \left(\frac{1}{25}\right)^2 \\
 &0^{2019} ; \quad \left(\frac{2020}{2021}\right)^0 ; \quad (-1)^{2016}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

Donner le signe des résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{-3}{17}\right)^{2019} ; \quad (-0,0034)^{2018} ; \quad \left(\frac{7}{3}\right)^{33} . \\
 &(-5)^{2n+1} \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel.}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer :

$$\begin{aligned}
 B &= (-3)^2 + (-2) \times (-4) + 12 : (-3) \\
 O &= 8 - 2^3 \times 5 - 14 + 9 - (-2)^4 \\
 U &= -3^3 + 6(8 - 3)^2 + 8 - 8(7 - 3)^7 \\
 Z &= 12 - 3^3 + 3^4 - (-1)^9 + 2^4 \\
 I &= 4 - 3 \times 2^4 - (8 - 6)^3 - 9 + 9 \times 2^7 \\
 T &= 3(3^2 - 2^2) - 4 \times 2^2 - (15 - 17)^2 - 2^4 : 2^2 .
 \end{aligned}$$

Exercice 4

Écrire sous forme d'une puissance, si cela est possible :

$$N = \left(\frac{-5}{8}\right)^{11} \times \left(\frac{9}{25}\right)^4 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{11}$$

$$O = 27^4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2^{-5}}{2^{-8}}$$

$$U = \left(\frac{8}{28}\right)^{-2} \times \left(\frac{-7}{2}\right)^4 \times \left(\frac{4}{49}\right)^6$$

$$R = \frac{(6^2 \times 5)^{-4}}{6^{-3} \times [(6^3)^{-2} \times 5^2]^{-1}}$$

03

Investissement — Simplification

Exercice 5

a , b et c sont des nombres rationnels non nuls.

Simplifier :

$$4(a^{-1})^4 ; \quad \frac{5}{3}a \times \frac{-2}{25}a^{-2} ; \quad \frac{7}{2}a^4 \times \frac{2}{21}a^{-2} \times (-3a^{-3})$$

$$c^{-3} \times b(ac^2)^{-2} \times a^{-4} \times b^2 ; \quad (3a)^3 \times \left(\frac{1}{a}\right)^{-2} \times \left(\frac{a}{2}\right)^{-3}$$

Exercice 6

Simplifier :

$$[3(ba)^3]^{-2} \times \left[\frac{b}{3(ba)^{-3}}\right]^2 ; \quad \frac{a^3b^{-5}}{(ab)^7} ;$$

$$\frac{(9a)^{-2} \times 2b^{-5}}{(\frac{1}{3}b)^4} ; \quad \frac{(a^{-3}b^2)^{-1} \times (a^4 \times b)^2}{b(b^3a^{-2})^{-3} \times (a^{-1}b)^{-3}} ;$$

$$\frac{(a^{-1}b^{-3}c^2) \times a^{-4}b^2 \times c^{-3}}{a(b^{-2}c)^2 \times (c^2b^{-1}a^2)^{-1} \times a^{-3}}.$$

$$M = \left[1 - \left(\frac{2+a}{a}\right)^{-1}\right]^{-1} \quad \text{où } a \neq 0 \text{ et } a \neq -2.$$

$$A = 2018^0 - (-1)^{2017} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

$$T = \frac{2^{-1} + 6^{-1}}{9^{-1} - 3^{-1}}$$

$$H = \frac{5^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2}{-10 \times 5^{-4}}$$

Exercice 7

Trouver l'entier naturel n qui vérifie :

$$100^n = 10^{1000}$$

Exercice 8

1) Simplifier puis calculer les expressions suivantes :

$$A = (2 \times 3)^5 \times 3^{-4} \times 2^{-1} \times 2^{-3} \times 3^{-2}$$

$$B = \frac{5^{-8} \times 10^{-2} \times 3^6}{10^{-4} \times 3^5 \times 10 \times 5^{-6}}$$

2) S'aider d'une calculatrice scientifique pour vérifier les résultats obtenus, en utilisant les touches : ÷

+
−
×
 $x^\square$
 x^2

04**Investissement — Écrire sous la forme d'une puissance****Exercice 9**

Écrire les nombres suivants sous la forme :

$$2^n \times 3^p \times 5^m :$$

$$2700 ; \quad 2880 ; \quad 324 ; \quad 12000.$$

Exercice 10

Écrire les nombres suivants sous la forme : $2^n \times 3^p$.

$$a = 16^8 \times 27^5 \times 36^3$$

$$b = 54^4 \times 288 \times 6^7$$

05**Investissement — Écriture scientifique****Exercice 11**

Donner l'écriture scientifique puis l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants :

$$U = \frac{0,008 \times (0,05)^3}{10^{-11}}$$

$$N = 0,03 \times 10^{-17} + 154 \times 10^{-19}$$

$$D = \frac{0,008 \times 10^{-5} \times 0,001}{0,09 \times 10^5 \times 0,08 \times (10^{-3})^{-2}}$$

$$I = 10^{23} \times 4^{19} \times \frac{5^{-8}}{4^{21}} \times 5^{-16}$$

Exercice 12

Un scientifique japonais a calculé le nombre π avec près de 51539608000 décimales exactes.

- 1) Donner la notation scientifique du nombre 51539608000.
- 2) Si chaque chiffre mesure 7 mm, calculer la longueur de l'écriture π avec 51539608000 décimales (donner le résultat en écriture scientifique).
- 3) Quelle est la distance la plus voisine de cette longueur :
 - La distance Casablanca-Laâyoune ?
 - La longueur de l'Équateur (environ 40 000 km) ?
 - La distance Terre-Lune (environ 380 000 km) ?

06

Investissement — Problème

Exercice 13

Déterminer x dans chacun des cas suivants :

$$1) 2^{x+2} - 2^x = 96 \quad 2) 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$$

$$3) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 3(12^x + 12^{x-1})$$

$$4) \frac{(25)^{x-3} \times 5^{2x}}{(125)^{x+2}} = 625$$

07

Investissement — Calculatrice

Exercice 14

- 1) Calculer à la machine :

$$a = 345678^2 \quad \text{puis} \quad b = 345676 \times 345680.$$

Les nombres a et b sont-ils égaux ?

Sur certaines machines, on trouve :

$$a = b = 1,194932797\text{E}11$$

et sur d'autres on trouve :

$$a = 119\,493\,279\,684 \quad , \quad b = 119\,493\,279\,680$$

- 2) Vérifier cette conjecture en calculant, à la machine, le nombre $a - b$.
(Sur la plupart des machines, on trouve $a - b = 4$).
Conclure.

08

Mon bilan

- 1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :

Exercice B1

Le nombre $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ est égal à : ...

$$A : \frac{125}{8}, \quad B : \frac{15}{2}, \quad C : \frac{15}{8}.$$

Exercice B2

Le nombre $\left(-\frac{135}{513}\right)^0$ est égal à : ...

$$A : -\frac{135}{513}, \quad B : 0, \quad C : 1.$$

Exercice B3

Le nombre 2^{-5} est égal à : ...

$$A : -\frac{1}{32}, \quad B : \frac{-5}{2}, \quad C : \frac{1}{2^5}.$$

Exercice B4

Le nombre $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$ est égal à : ...

$$A : \frac{16}{9}, \quad B : \left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad C : -\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Exercice B5

Le nombre $\frac{2^7 \times 25^3}{10^9}$ est égal à : ...

$$A : 2^{-2} \times 5^{-3}, \quad B : 2^2 \times 5^3, \quad C : 500.$$

Exercice B6

Le nombre $\left(-\frac{5}{3}\right)^7 \times \left(\frac{3}{7}\right)^7$ est égal à : ...

$$A : \left(-\frac{3}{7}\right)^5, \quad B : \left(\frac{-5}{7}\right)^7, \quad C : \left(\frac{5}{7}\right)^7.$$

Exercice B7

Le nombre $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{7}\right)^8$ est égal à : ...

positif ; nul ; négatif

Exercice B8

L'écriture scientifique du nombre : $A = 253,47$ est :

$$25,347 \times 10^1 ; \quad 2,5347 \times 10^2 ; \quad 0,25347 \times 10^7$$

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Définition 1	
Ex : 2	Définition 1	
Ex : 3	Propriété 1	
Ex : 4	Propriété 1	
Ex : 5	Propriété 2	
Ex : 6	Propriété 3	
Ex : 7	Propriété 4	
Ex : 8	Définition 2	

3) Exercices pour la remédiation voir R8 page : 198

09**Approfondissement — Je recherche****Problème ouvert****Exercice 15**

Montrer que :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{15^3} + \frac{1}{5^3} = \frac{28}{15^3} \\ 2) \quad & \frac{5}{4^{10}} - \frac{5}{2^{10}} = \frac{5(1 - 2^{10})}{4^{10}} \\ 3) \quad & 4444^2 + 3333^2 = 5555^2 \\ 4) \quad & (499999)^2 + 99999 = 25 \times 10^{10} \end{aligned}$$

Dans la vie**Exercice 16**

Une analyse de sang a donné le résultat suivant : 7500 globules blancs par mm^3 de sang.
Combien y-a-t-il de globules blancs dans 6 litres de sang d'un corps humain ?

Exercice 17

Le cœur humain bat en moyenne 85 fois par minute.
Soit N le nombre de battements du cœur pendant une vie de 75 ans.
a. Montrer que : $N = 33507 \times 10^5$.
b. Écrire N en écriture scientifique.

Exercice 18

Un bébé mesure 50 cm à sa naissance.
Sachant qu'il ne cesse de grandir, à la vitesse moyenne de 0,000000005 mètre par seconde, quelle taille

mesurera-t-il à 3 ans ? on donnera le résultat en écriture scientifique.
N.B : Une année est constituée d'environ 32000000 secondes.

Puissance et écritures littérales

Exercice 19

Le rayon d'un atome d'oxygène est de 650×10^{-13} m
Convertir ce rayon en nanomètres : nm
Indication: $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$

Exercice 20

a et b sont deux nombres rationnels non nuls.

$$\text{Soit } M = \frac{a^4 \times (a^3 \times b^{-2})^{-5}}{(a^5 \times b^{-3})^3}$$

- 1) Montrer que : $M = \frac{b^{19}}{a^{-4}}$
- 2) Calculer M pour $a = 10^{-2}$ et $b = 10^{-3}$.

Exercice 21

a et b deux nombres rationnels non nuls tels que :

$$\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$$

Calculer :

$$E = \frac{(a^3 b^{-2})^2 \times a^6}{b^8} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-8}$$

Exercice 22

On donne : $E = 2016(x+1) - 2^5 \times 3^2 \times 7x$.
Calculer E lorsque $x = 2017^{2018}$.

Exercice 23

x est un nombre entier naturel.

- 1) Vérifier que : $x(x+1)(x+2) = (x+1)^3 - (x+1)$
- 2) En déduire que : $2017^3 - 2016 \times 2017 \times 2018 = 2017$

Exercice 24

- 1) Vérifier que : $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
- 2) En déduire que : $3^8 + 163 = 82^2$.

Calculer une somme

Exercice 25

Montrer que : $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3.$$

Trouver un nombre qui s'écrit de la même manière.

Exercice 26

1) Vérifier que :

$$3 + 6 + 12 = 3(2^3 - 1)$$

$$3 + 6 + 12 + 24 = 3(2^4 - 1)$$

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 3(2^5 - 1)$$

2) En déduire que S est divisible par 73 tel que :

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768$$

Déterminer un exposant

Exercice 27

Compléter par le nombre qui convient :

$$27^4 = 3^{\dots} ; \quad 125^6 = 5^{\dots}$$

$$64^{-3} = 2^{\dots} ; \quad \frac{1}{343} = 7^{\dots}$$

Exercice 28

Remplacer chaque pointillé par l'entier qui convient.

$$7^{19} = 7^9 \times 7^{\dots} ; \quad (x^{\dots})^5 = x^{-15}$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\dots} \times \left(\frac{8}{9}\right)^4 = \left(\frac{8}{9}\right)^{-2} ; \quad \frac{x^2}{x^{\dots}} = x^{-10}$$

$$x \times x^{\dots} \times x^{-2} = x^{r+5} ; \quad (x^2 \times x^{\dots})^3 = x^{-12}.$$

Exercice 29

Dans chaque cas, déterminer la valeur de n ou de x manquante vérifiant l'égalité:

$$3,14 \times 10^n = 314 \quad 57 \times 10^n = 0,000057$$

$$8,69 \times 10^6 = 869 \times 10^n \quad x \times 10^4 = 2017$$

$$7,13 \times 10^{-5} = x \cdot 10^{-8} \quad 0,468 \times 10^{-2} = 46,8 \times 10^{-n}$$

10

Challenges

Exercice 30

Monsieur Puissance, au cours d'un voyage a entendu une rumeur...

Le 1^{er} jour de son retour dans la ville, il répète cette rumeur à trois personnes.

Le 2^{ème} jour chacune des trois personnes met au courant trois nouvelles personnes.

Les jours suivants, la diffusion de la rumeur se poursuit de la même manière dès qu'une personne l'apprend, elle en informe trois autres dès le lendemain.

- 1) Combien de personnes apprennent la rumeur le 3^{ème} jour ?
- 2) Écrire le calcul permettant de trouver combien de personnes apprennent la rumeur le 2017^{ème} jour (sans effectuer de calcul).
- 3) Même question pour le $n^{\text{ème}}$ jour.

Exercice 31

x est un nombre rationnel tel que :

$$x^{10} = 59049 \quad \text{et} \quad x^7 = 2187$$

Calculer x^2 et x^{13} (sans calculer x).

Exercice 32

n est un entier naturel.

Calculer n sachant que : $7^n + 49^n = 2450$.

Exercice 33

Quel est le chiffre des unités de A :

$$A = 2016^{2017} + 2019^{2016} ?$$

11

Situations proposées au TIMSS

Exercice 34

Situation 1 : x est un entier tel que : $2^4 + 3^2 = x^2$. Déterminer x .

Exercice 35

Situation 2 : Quelle est la valeur de l'expression $9x^2 - x$ pour $x = -\frac{1}{3}$?