

## 11

# Théorème de Pythagore

Connaître le théorème de Pythagore, calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle et reconnaître que l'hypoténuse est son plus grand côté.

**Feuille d'exercices**

45 min

Nom : \_\_\_\_\_

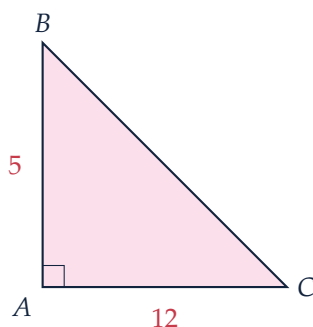
Date : \_\_\_\_\_

## 01

## Pratique — J'applique

**Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle****Exemple 1**

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tel que :  $AB = 5$  cm et  $AC = 12$  cm.  
Calculer  $BC$ .

**Correction**

On sait que  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ , donc  $[BC]$  est son hypoténuse.

D'après le théorème de Pythagore, on obtient :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

Or :  $AB = 5$  cm et  $AC = 12$  cm (d'après les données),

alors :  $BC^2 = 5^2 + 12^2$

$$BC^2 = 25 + 144$$

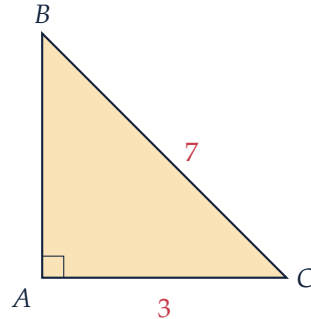
$$BC^2 = 169 = 13^2.$$

Comme  $BC > 0$ , alors :  $BC = 13$  cm.

Utiliser la touche  $\sqrt{\phantom{x}}$  de la calculatrice

## Exemple 2

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tel que :  $BC = 7$  cm et  $AC = 3$  cm.  
Calculer la longueur en cm du côté  $[AB]$ , arrondi au dixième.



## Correction

On connaît les longueurs de deux côtés du triangle rectangle  $ABC$  ; donc on peut appliquer le théorème de Pythagore.

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  ; donc  $[BC]$  est son hypoténuse.

D'après le théorème de Pythagore, on obtient :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

Or :  $BC = 7$  cm et  $AC = 3$  cm,

alors :  $7^2 = AB^2 + 3^2$  c'est-à-dire :  $49 = AB^2 + 9$ .

Donc :  $AB^2 = 49 - 9$  c'est-à-dire :  $AB^2 = 40$ .

Donc :  $AB = \sqrt{40}$  car  $AB > 0$  et  $(\sqrt{40})^2 = 40$ .

|             |            |
|-------------|------------|
| $\sqrt{40}$ | 6,32455553 |
|-------------|------------|

(en utilisant la touche  $\sqrt{\phantom{x}}$  de la calculatrice, puis la touche d'arrondi).

L'arrondi au dixième de  $\sqrt{40}$  est 6,3, donc la longueur du côté  $[AB]$  est environ 6,3 :  $AB \approx 6,3$  cm

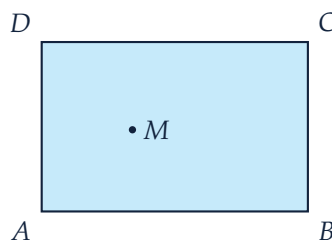
## Utiliser le théorème de Pythagore pour démontrer

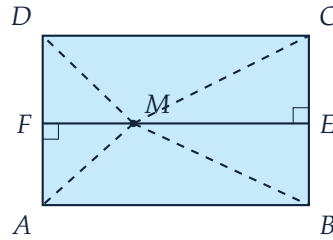
## Exemple 3

$ABCD$  est un rectangle.

Soit  $M$  un point à l'intérieur du rectangle  $ABCD$ .

Montrer que :  $MA^2 - MB^2 = MD^2 - MC^2$





### Correction

Soit  $E$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(BC)$ .

Soit  $F$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(AD)$ .

On obtient ainsi deux rectangles  $ABEF$  et  $DCEF$ , il en résulte que :  $AF = BE$  et  $DF = EC$ .

En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles  $AFM$  et  $BEM$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 MA^2 - MB^2 &= (AF^2 + MF^2) - (BE^2 + ME^2) \\
 &= AF^2 + MF^2 - BE^2 - ME^2 \\
 &= MF^2 - ME^2 \\
 &= (MD^2 - DF^2) - (MC^2 - EC^2) \\
 &= MD^2 - DF^2 - MC^2 + EC^2 \\
 &= MD^2 - EC^2 - MC^2 + EC^2 \quad (\text{car } DF = EC) \\
 &= MD^2 - MC^2
 \end{aligned}$$

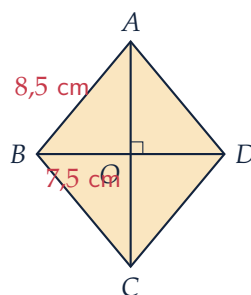
Donc :  $MA^2 - MB^2 = MD^2 - MC^2$ .

### Calculer la longueur de la diagonale d'un losange

#### Exemple 4

$ABCD$  est un losange de centre  $O$  tel que :  $AB = 8,5$  cm et  $BD = 15$  cm

Calculer la longueur de la diagonale  $[AC]$



### Correction

$ABCD$  est un losange, donc ses diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu  $O$ .

Donc :  $AC = 2OA$  et  $OB = \frac{1}{2}BD = 7,5$  cm.

Le triangle  $OAB$  est rectangle en  $O$ , donc d'après le théorème de Pythagore,

on a :  $OA^2 + OB^2 = AB^2$ ,

donc :  $OA^2 = AB^2 - OB^2 = (8,5)^2 - (7,5)^2 = 72,25 - 56,25 = 16$

Donc :  $OA = \sqrt{16} = 4$ . D'où la longueur de la diagonale  $[AC]$  est :  $AC = 2OA = 8$  cm.

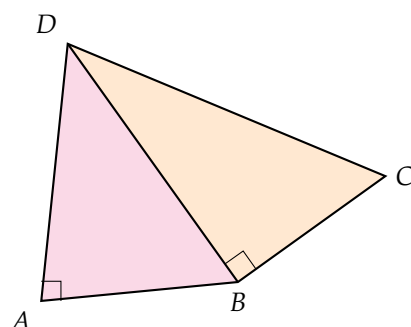
## 02

### Investissement — Je m'entraîne

#### Réviser son cours

##### Exercice 1

En utilisant les données de la figure suivante, compléter les égalités suivantes :



$$\begin{array}{lll} BD^2 = \dots^2 + \dots^2 & AB^2 = \dots^2 - \dots^2 & AD^2 = \dots^2 - \dots^2 \\ DC^2 = \dots^2 + \dots^2 & BC^2 = \dots^2 - \dots^2 & BD^2 = \dots^2 - \dots^2 \end{array}$$

##### Exercice 2

Recopier et compléter les phrases suivantes :

- 49 est le carré de ....  
La racine carrée de 49 est ....
- ... est le carré de 22.  
La racine carrée de ... est 22.
- ... est le carré de 0,3.
- La racine carrée de 256 est ....

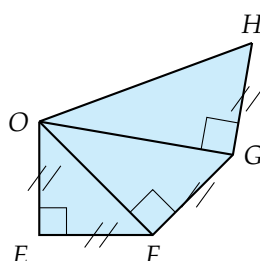
#### Calcul d'une longueur

##### Exercice 3

On considère la figure ci-contre :

On donne :  $OE = 1$ .

Calculer  $OF$ ,  $OG$  et  $OH$ .



##### Exercice 4

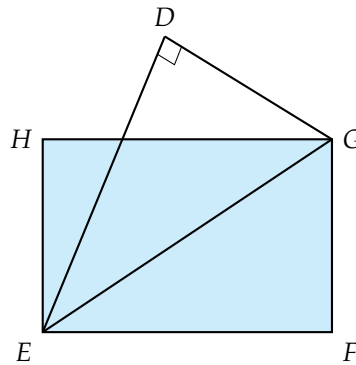
Dans la figure ci-contre :

$EFGH$  est un rectangle.

$DEG$  est un triangle rectangle.

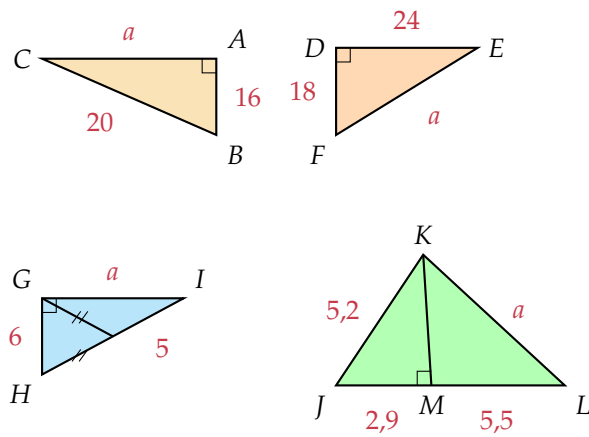
$EF = 6 \text{ cm}$  ;  $EH = 8 \text{ cm}$  ;  $DE = 6,2 \text{ cm}$

**a.** Calculer  $EG$ .      **b.** Calculer  $DG$ .



### Exercice 5

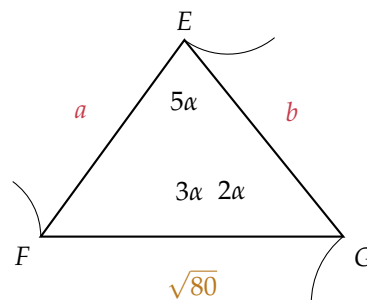
Calculer  $a$  dans chacun des cas suivants :



### Exercice 6

Observer la figure suivante :

- 1) Montrer que  $EFG$  est un triangle rectangle en  $E$ .
- 2) Calculer  $a^2 + b^2$ .



### Exercice 7

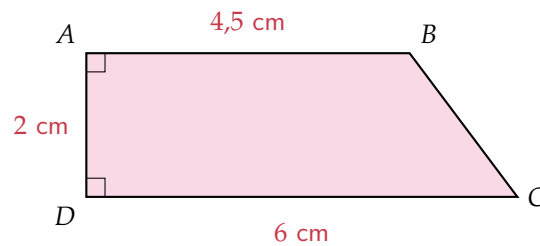
$ABCD$  est un losange tel que :

$$AC = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad BD = 8 \text{ cm}.$$

Calculer  $AB$ .

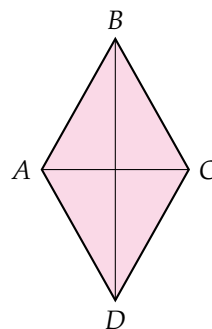
### Exercice 8

Dans la figure suivante :  
 $ABCD$  est un trapèze rectangle en  $A$  et  $D$ .  
 Calculer :  $AC$ ,  $BC$  et  $BD$ .



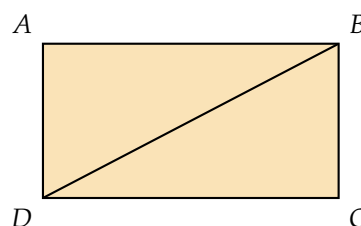
### Exercice 9

$ABCD$  est un losange tel que :  $AC = 5$  cm et  $BD = 12$  cm  
 Calculer le périmètre de  $ABCD$ .



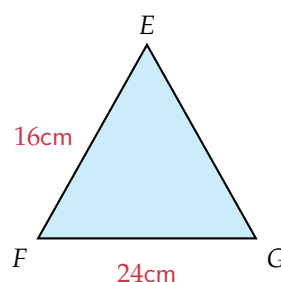
### Exercice 10

$ABCD$  est un rectangle tel que son périmètre mesure 34 cm et que :  $AB = 12$  cm.  
 Déterminer la longueur de la diagonale du rectangle.



### Exercice 11

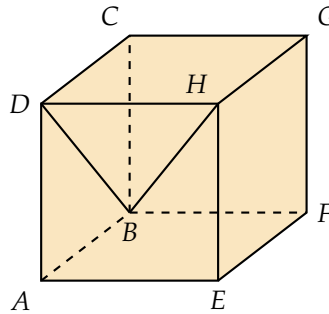
$EFG$  est un triangle isocèle en  $E$  tel que :  $EF = 16$  cm et  $FG = 24$  cm.  
 Calculer la longueur de la hauteur relative à la base  $[FG]$ .



## Exercice 12

$ABCDEFGH$  est un cube de 4cm d'arête.

- 1) Calculer la longueur  $DE$ .
- 2) **a.** Sans justification, donner la nature du quadrilatère  $BDHF$ .  
**b.** On admet que le triangle  $BDH$  est rectangle. Calculer  $BH$ .



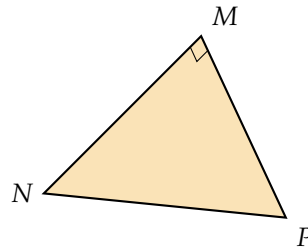
## Exercice 13

$MNP$  est un triangle rectangle en  $M$  tel que :

$$MN = x + 8 ; \quad MP = x + 2$$

$$\text{et } NP = 2x + 5.$$

Calculer  $x$ .



## Exercice 14

$ABC$  est un triangle rectangle en  $B$  tel que :

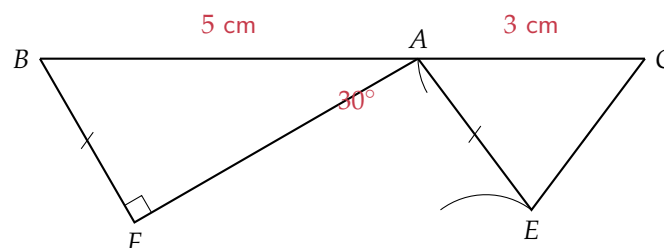
$$AB = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad AC = x^2 + y^2 \quad (\text{où } x > y > 0).$$

Calculer  $BC$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

## Exercice 15

Dans la figure ci-dessous :  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points alignés.

Calculer la longueur  $EF$ .

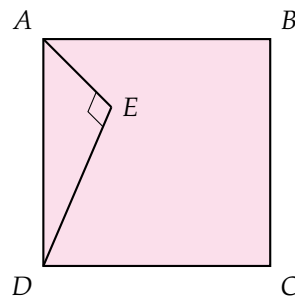


### Exercice 16

Dans la figure suivante,  $ABCD$  est un carré.

On donne :  $AE = a$  et  $DE = 7a$  ( $a > 0$ )

Calculer les longueurs des diagonales de  $ABCD$ .



### Exercice 17

Dans un triangle  $EFG$  rectangle en  $E$ , la hauteur issue de  $E$  coupe  $[FG]$  en  $K$  et la médiane issue de  $E$  coupe  $[FG]$  en  $L$  ( $EF > EG$ ).

1) **a.** Sachant que  $EL = 5$  et  $EK = 4$ , calculer  $LG$ .

**b.** Calculer  $KF$ .

2) Calculer le périmètre du triangle  $EFG$ .

### Exercice 18

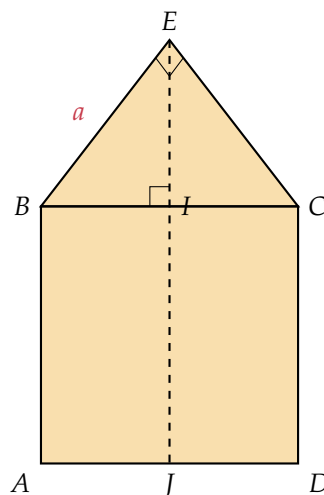
Dans la figure ci-contre :

$ABCD$  est un carré et  $BEC$  est un triangle isocèle rectangle en  $E$ .

1) Montrer que :

$$AB^2 = 2a^2 \quad \text{et} \quad EJ^2 = \frac{9}{4}a^2.$$

2) En déduire que :  $ED^2 = 5a^2$ .

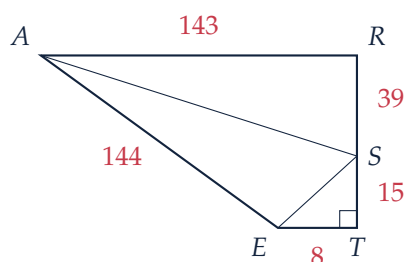


# 03

## Mon bilan

### 1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

Pour les exercices ① à ③, on utilise la figure ci-contre :



#### Exercice B1

La longueur  $AS$  est égale à : ...

A : 143,      B : 144,      C : 145.

#### Exercice B2

La longueur  $ES$  est égale à : ...

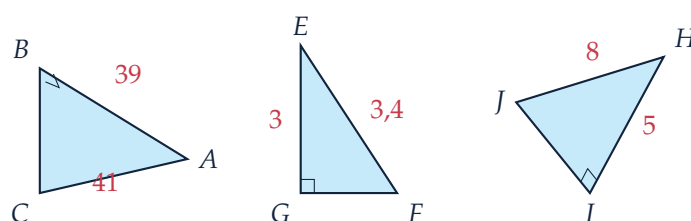
A : 17,      B : 18,      C : 19.

#### Exercice B3

Les droites  $(AE)$  et  $(SE)$  sont : ...

A : sont parallèles,      B : sont perpendiculaires,      C : ne sont pas perpendiculaires.

Pour les exercices ③ à ⑥, on utilise la figure ci-contre : (l'unité de longueur étant le centimètre)



#### Exercice B4

La longueur  $BC$  est égale à : ...

A : 40,      B :  $\sqrt{160}$ ,      C : 12.

#### Exercice B5

La longueur  $GF$  est égale à : ...

A : 1,6,      B : 1,7,      C : 2.

### Exercice B6

La valeur approchée de  $IJ$  est : ...

A : 6,      B : 6,24,      C : 7.

**Correction page : 197**

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

|        | Savoir   | Pratique |
|--------|----------|----------|
| Ex : 1 | Théorème |          |
| Ex : 2 | Théorème |          |
| Ex : 3 | Théorème |          |
| Ex : 4 | Théorème |          |
| Ex : 5 | Théorème |          |
| Ex : 6 | Théorème |          |

3) Exercices pour la remédiation voir R11 page : 199

## 04 Approfondissement — Je recherche

Pour démontrer

### Exercice 19

$EFG$  est un triangle équilatéral.

Soit  $H$  le symétrique de  $F$  par rapport à  $G$ .

Montrer que :  $EH^2 = 3EF^2$ .

### Exercice 20

$ABC$  est un triangle isocèle en  $A$ .

Soit  $[AH]$  la hauteur issue de  $A$  et  $D$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $C$ .

Montrer que :  $AD^2 = 2BC^2 + AC^2$ .

### Exercice 21

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tel que :

Aire  $ABC = 84 \text{ cm}^2$  et  $AB + AC = 31 \text{ cm}$

1) Montrer que le périmètre du triangle  $ABC$  est 56 cm.

2) Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[BC]$ .

a. Montrer que  $AH = 6,72 \text{ cm}$ .

b. Calculer  $CH$  sachant que :  $AB = 24 \text{ cm}$ .

**Problèmes ouverts**

### Exercice 22

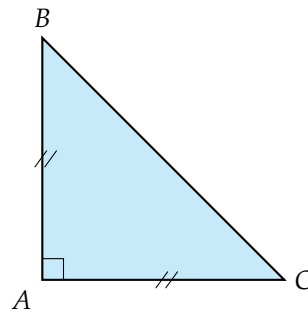
I —  $ABC$  est un triangle isocèle rectangle en  $A$  tel que :  $AB = a$  (où  $a > 0$ )

Montrer que :  $BC = a\sqrt{2}$ .

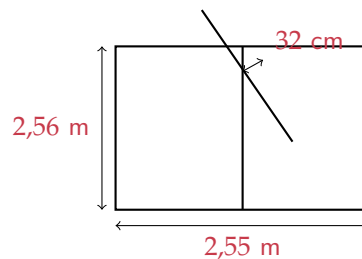
II —  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  tel que :

$$BC = a \quad \text{et} \quad \widehat{ACB} = 60^\circ$$

Montrer que :  $AC = \frac{a}{2}$  et  $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .



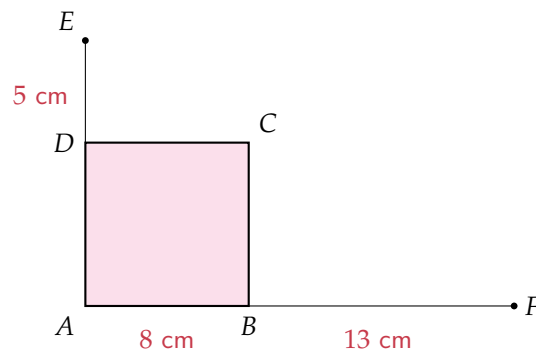
### Exercice 23



Par Pythagore, expliquer pourquoi « cela ne passe pas » ?

### Exercice 24

On considère la figure suivante où  $ABCD$  est un carré.  
Les points  $E$ ,  $C$  et  $F$  sont-ils alignés ?

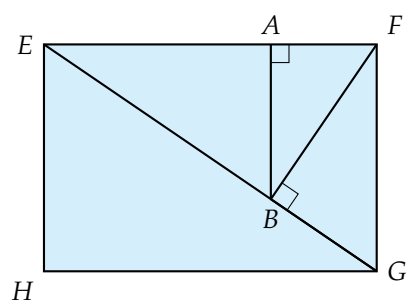


## Calcul d'aire

### Exercice 25

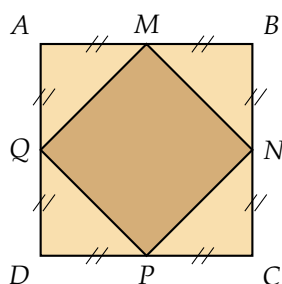
Dans la figure ci-dessous :  
 $EFGH$  est un rectangle tel que :  $EF = 4$  et  $FG = 3$ .

- 1) Calculer  $EG$ .
- 2) **a.** Calculer l'aire du triangle  $EFG$ .  
**b.** En déduire  $BF$ .
- 3) Calculer  $BG$ .
- 4) **a.** Déterminer l'aire du triangle  $BEF$ .  
**b.** En déduire  $AB$ .



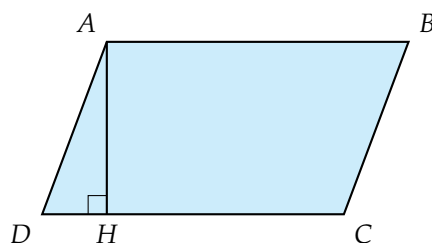
### Exercice 26

$ABCD$  est un carré de côté 5cm.  
Calculer l'aire du carré  $MNPQ$ .



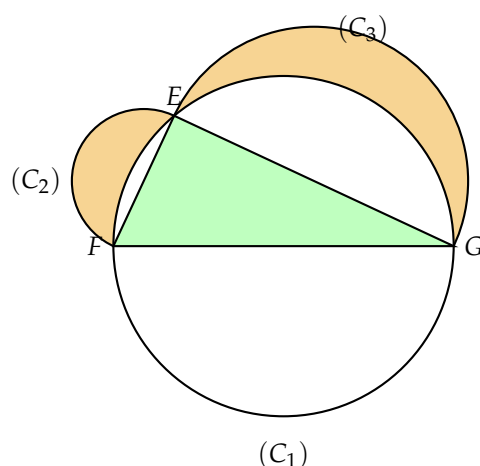
### Exercice 27

Dans la figure ci-contre :  
 $ABCD$  est un parallélogramme.  
 $AB = 7$  cm ;  $BC = 5$  cm ;  $CH = 4$  cm.  
Calculer l'aire de  $ABCD$ .



### Exercice 28

On considère les cercles :  
( $C_1$ ) de diamètre  $[FG]$ ,  
( $C_2$ ) de diamètre  $[EF]$  et  
( $C_3$ ) de diamètre  $[EG]$ .  
Montrer que l'aire de la figure coloriée en jaune est égale à l'aire du triangle  $EFG$ .



## Racine carrée

### Exercice 29

Recopier et compléter les tableaux suivants à l'aide des touches  $\sqrt{\quad}$  et  $x^2$  de la calculatrice.

|            |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $a$        | 49  | 64  | ... | ... | 100 | ... | ... |
| $\sqrt{a}$ | ... | ... | 10  | 3   | ... | 5   | 12  |

|       |     |     |     |     |     |   |      |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|---|------|
| $a$   | 9   | 13  | ... | ... | 17  | 6 | ...  |
| $a^2$ | ... | ... | 225 | 121 | ... | 5 | 1089 |

### Exercice 30

Recopier et compléter les inégalités suivantes par deux entiers consécutifs.

$$(\dots)^2 < 83 < (\dots)^2 \quad ; \quad \dots < \sqrt{17} < \dots$$

$$(\dots)^2 < 38 < (\dots)^2 \quad ; \quad \dots < \sqrt{6} < \dots$$

### Exercice 31

Donner une valeur approchée au millièmè près par défaut de chacun des nombres suivants (en utilisant la touche convenable de la calculatrice) :

$$\sqrt{2} ; \quad \sqrt{3} ; \quad \sqrt{11} ; \quad \sqrt{19} ; \quad \sqrt{5,37}$$

## 05

### Challenges

### Exercice 32

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

Soit  $D$  le milieu de  $[AB]$  et  $E$  le projeté orthogonal de  $D$  sur  $[BC]$ .

Montrer que :  $EC^2 = AC^2 + EB^2$ .

## Exercice 33

$ABCD$  est un losange.

Montrer que :  $4AB^2 - AC^2 = BD^2$ .

## Avec TICE

## Exercice 34

$ABCD$  est un parallélogramme.

1) Montrer que :  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

2) Utiliser un **tableur** pour tester l'égalité demandée.

## Exercice 35

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ .

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ .

Montrer que :  $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$ .

## Exercice 36

Soit  $EFG$  un triangle, on considère à son extérieur les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  tels que les triangles  $AFG$ ,  $BGE$  et  $CEF$  sont isocèles et rectangles respectivement en  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On suppose :  $AF = 15$  ;  $BG = 12$  ;  $CE = 9$ .

Montrer que les points  $B$ ,  $E$  et  $C$  sont alignés.

## 06

## Situations proposées au TIMSS

Une corde à laquelle sont attachés de petits drapeaux relie le point  $A$  au point  $B$  comme indiqué sur la figure.

Quelle est la longueur de la corde ?

