

2 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités géométriques

05

Triangle et parallèles

Connaître le théorème des milieux et la propriété des trois rapports égaux dans un triangle, et les utiliser pour démontrer un parallélisme, un milieu ou calculer une longueur.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

Montrer que deux droites sont parallèles

Exemple 1

Sur la figure ci-dessous, les points M , A , T et H sont alignés.
Montrer que : $(OE) \parallel (PU)$.



Correction

La présence des milieux dans les deux triangles de la figure nous incite à utiliser la propriété de la droite des milieux.

Dans le triangle AMI , O est le milieu de $[MI]$ et E est le milieu de $[AI]$.

Donc : $(OE) \parallel (MA)$.

Or : $(MA) = (TH)$ car M , A , T et H sont des points alignés.

Donc : $(OE) \parallel (TH)$ ①

Dans le triangle STH ,

U est le milieu de $[ST]$ et P est le milieu de $[SH]$

Donc : $(PU) \parallel (TH)$ ②

De ① et ②, on déduit que : $(PU) \parallel (OE)$.

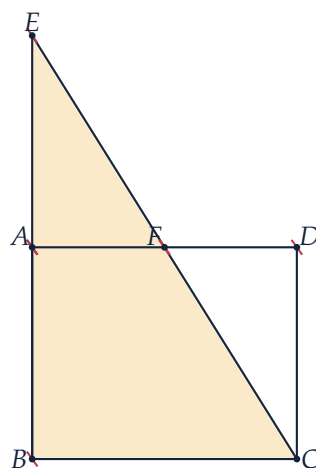
Montrer qu'un point est le milieu d'un segment

Exemple 2

$ABCD$ est un parallélogramme.

Soit E le symétrique de B par rapport à A et la droite (AD) coupe $[EC]$ en F .

Montrer que F est le milieu de $[AD]$.



Correction

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme.

Donc : $(AD) \parallel (BC)$.

E est le symétrique de B par rapport à A .

Dans le triangle BEC , A est le milieu de $[BE]$ et $(AD) \parallel (BC)$

Donc la droite (AD) passe par A milieu du côté $[BE]$ et parallèle au côté $[BC]$.

Donc, (AD) coupe le troisième côté $[EC]$ en son milieu.

Par conséquent F est le milieu de $[EC]$.

Dans le triangle BCE , on a A milieu de $[BE]$ et F milieu de $[EC]$, donc $AF = \frac{1}{2} BC$

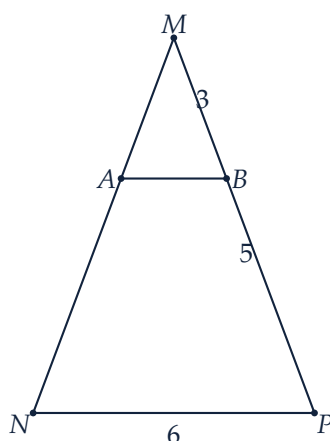
$ABCD$ est un parallélogramme ; donc $BC = AD$; donc $AF = \frac{1}{2} AD$ et les points A , F et D sont alignés ; d'où F est le milieu de $[AD]$.

Calculer une longueur

Exemple 3

Dans la figure ci-contre : $(AB) \parallel (NP)$.

Calculer AB .



Correction

Dans le triangle MNP , on a : A est un point de $[MN]$, B est un point de $[MP]$ et $(AB) \parallel (NP)$.

D'après la propriété des trois rapports égaux, on obtient : $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MP} = \frac{AB}{NP}$

MB , MP et NP sont connues et on cherche AB .

Donc : $\frac{3}{3+5} = \frac{AB}{6}$ et $\frac{3}{8} = \frac{AB}{6}$
 Alors : $AB = \frac{6 \times 3}{8}$; donc $AB = 2,25$.

Partage d'un segment

Exemple 4

- Tracer un segment $[EF]$.
- Partager, à la règle et au compas, ce segment $[EF]$ en cinq segments de même longueur.

Correction

- On trace une demi-droite $[Ex)$
- Sur $[Ex)$, on place les points A, B, C, D, M tels que : $EA = AB = BC = CD = DM$ (en utilisant le compas).
- Avec la règle, on trace la droite (MF)
- On trace (Δ) la parallèle à la droite (MF) passant par A .
- Soit N le point d'intersection de (Δ) et (EF) .

Montrons que : $EN = \frac{1}{5} EF$.

Dans le triangle MEF :

A est un point de $[EM]$; N est un point de $[EF]$ et $(AN) \parallel (MF)$

D'après la propriété des trois rapports égaux, on obtient : $\frac{EN}{EF} = \frac{EA}{EM} = \frac{NA}{FM}$

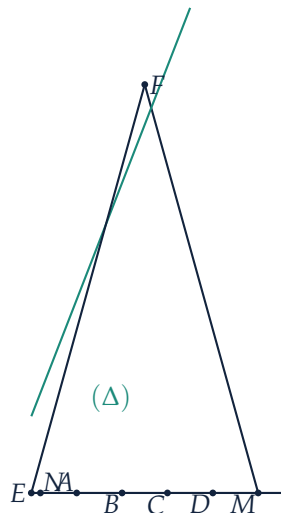
Considérons l'égalité : $\frac{EN}{EF} = \frac{NA}{FM}$.

On a : $EM = EA + AB + BC + CD + DM$.

$EM = EA + EA + EA + EA + EA$.

$EM = 5EA$. Donc : $\frac{EN}{EF} = \frac{EA}{5EA}$.

D'où : $\frac{EN}{EF} = \frac{1}{5}$, soit $EN = \frac{1}{5} EF$.



02

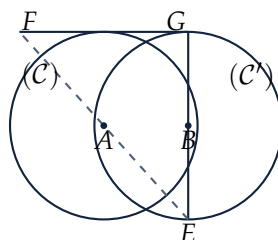
Investissement — Milieux et droites parallèles dans un triangle

Exercice 1

$[EF]$ est un diamètre du cercle (C) de centre A .

$[EG]$ est un diamètre du cercle (C') de centre B .

Montrer que les droites (FG) et (AB) sont parallèles.



Exercice 2

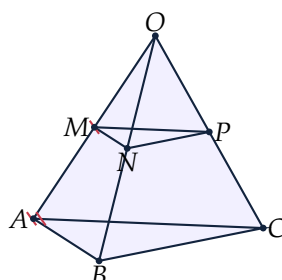
ABC est un triangle et O un point à l'extérieur de ABC .

Soit M le milieu de $[OA]$.

La parallèle à (AB) passant par M coupe (OB) en N .

La parallèle à (BC) passant par N coupe (OC) en P .

Montrer que : $(MP) \parallel (AC)$.



Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

Soit M le milieu de $[BC]$.

1) a. Construire N le symétrique de O par rapport à M .

b. Construire P le symétrique de B par rapport à N .

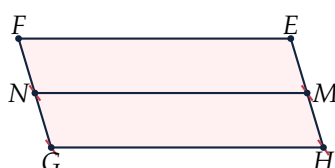
2) Montrer que C est le milieu de $[DP]$.

Exercice 4

$EFGH$ est un trapèze de bases $[EF]$ et $[HG]$.

Soit M le milieu de $[EH]$.

La parallèle à (EF) passant par M coupe $[FG]$ en N .



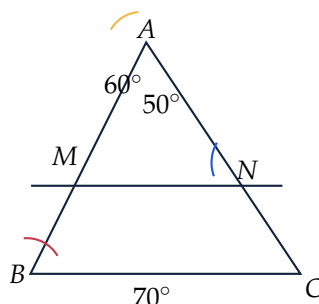
Démontrer que N est le milieu de $[FG]$.

Exercice 5

Observer la figure ci-contre :

$(MN) \parallel (BC)$

Montrer que N est le milieu de $[AC]$.



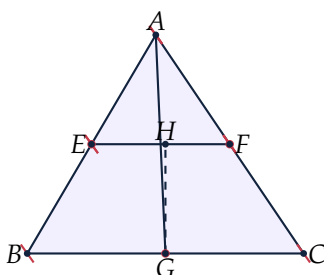
Exercice 6

ABC est un triangle.

E , F et G sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

La perpendiculaire à la droite (EF) passant par G coupe $[EF]$ en H .

Montrer que BCH est un triangle isocèle.



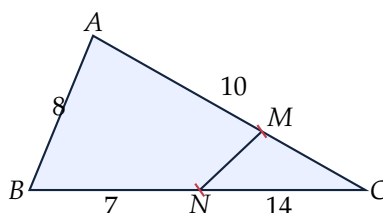
03

Investissement — Calcul d'une longueur

Exercice 7

M est un point de $[AC]$ et N est un point de $[BC]$.

Les droites (AB) et (MN) sont parallèles.



$MC = 10$; $AB = 8$; $BN = 7$ et $NC = 14$.

1) Calculer MN .

2) Calculer MA .

Exercice 8

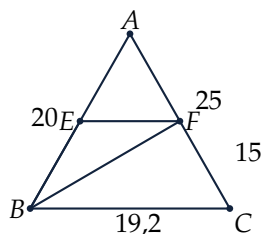
Dans la figure : $(EF) \parallel (BC)$

$AE = 20$; $AF = 25$;

$CF = 15$ et $BC = 19,2$.

1) Calculer AB et EF .

2) Montrer que BEF est un triangle isocèle.



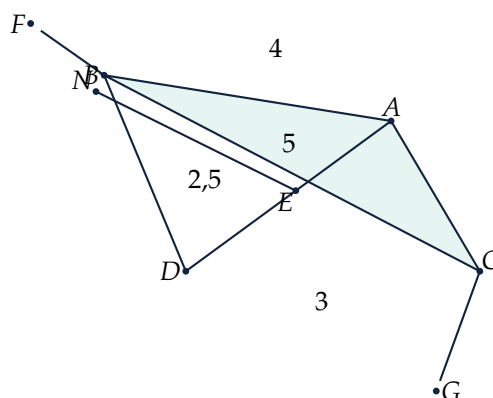
Exercice 9

Dans la figure : $(BF) \parallel (CG)$.

$AB = 4$; $BC = 5$; $CD = 3$

$BF = 3,6$ et $ED = 2,5$.

Calculer BE , AE et DG .



Exercice 10

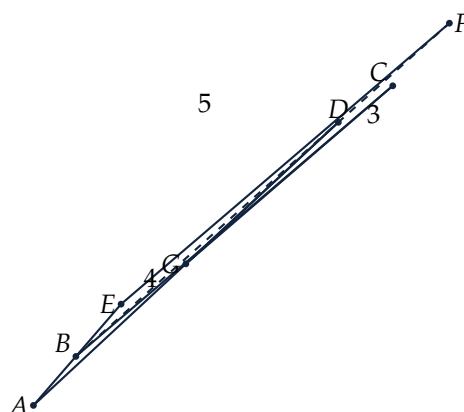
On considère la figure ci-contre :

$(CG) \parallel (AE)$; $(BC) \parallel (EF)$

$AF = 9$; $AG = 6$; $GD = 5$;

$CG = 4$ et $BE = 3$.

Calculer AB et AC .



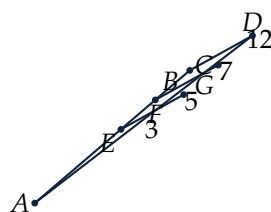
Exercice 11

On donne : $(BE) \parallel (CF) \parallel (DG)$

$AE = 3$; $BE = 5$;

$CF = 7$ et $DG = 12$.

Calculer EF et FG .



04

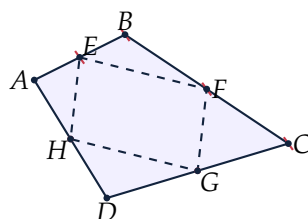
Investissement — Problèmes ouverts

Exercice 12

$ABCD$ est un quadrilatère.

E, F, G et H sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.



Exercice 13

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.

E et F sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.

La droite (EF) coupe $[BC]$ en G .

1) Montrer que : $(EF) \parallel (DC)$.

2) Montrer que : $EF = \frac{AB + DC}{2}$.

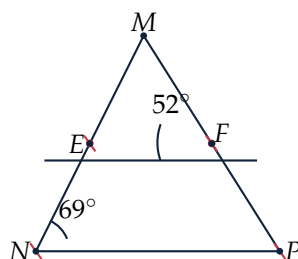
Exercice 14

Sur la figure ci-contre :

E et F sont les milieux respectifs de $[MN]$ et $[MP]$ et $NP = 8$ cm.

1) Calculer $\widehat{EMF}$.

2) Calculer EF .



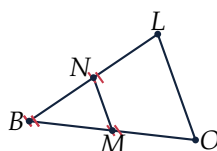
05

Mon bilan

1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

Exercice B1

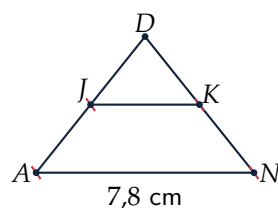
Dans la figure suivante, on a :



A : $(MN) \parallel (OL)$, B : $(MN) \perp (OL)$, C : $(MN) = (OL)$.

Exercice B2

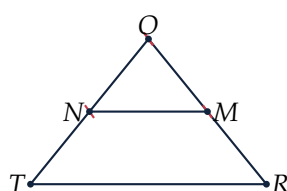
Dans la figure suivante, on a :



A : $JK = 3,8$ cm, B : $JK = 3,10$ cm, C : $JK = 3,9$ cm.

Exercice B3

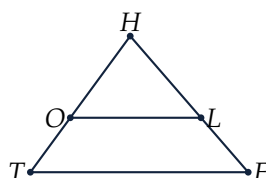
Si dans la figure suivante les droites (MN) et (TR) sont parallèles, alors : ...



A : $ON = \frac{1}{4} OT$, B : N est le milieu de $[OT]$, C : $ON = \frac{1}{3} OT$.

Exercice B4

Si dans la figure suivante, les droites (OL) et (TE) sont parallèles telles que : $HE = 5$ cm ; $HL = 2$ cm ; $TE = 7$ cm ; $HO = 3$ cm, alors : ...



A : $HT = 7,5$ cm et $OL = 2,8$ cm, B : $HT = 2$ cm et $OL = 7$ cm, C : $HT = 7$ cm et $OL = 1,8$ cm.

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Propriété 1	
Ex : 2	Propriété 1	
Ex : 3	Propriété 3	
Ex : 4	Propriété 4	

3) Exercices pour la remédiation voir R5 page : 198

06 Approfondissement — Je recherche

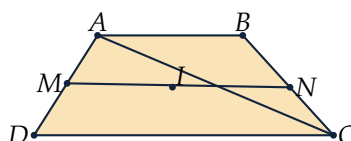
Problèmes ouverts

Exercice 15

$ABCD$ est un trapèze tel que : $(AB) \parallel (DC)$.

Une parallèle à (AB) coupe (AD) en M , (AC) en I et (BC) en N .

Montrer que : $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$.

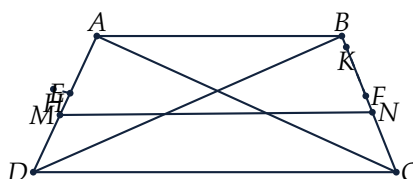


Exercice 16

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Une parallèle à (AB) coupe (AD) en M et (BC) en N .

Montrer que : $\frac{AE}{AH} = \frac{FN}{KC}$.



Exercice 17

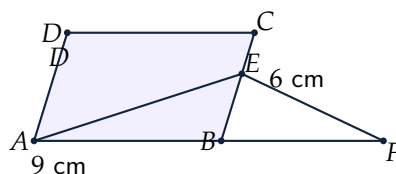
$ABCD$ est un parallélogramme tel que :

$AB = 9$ cm et $BC = 6$ cm.

Soit E le point de $[BC]$ tel que : $BE = 4$ cm.

La droite (AE) coupe (DC) en F .

Calculer CF .

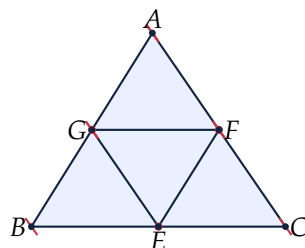


Exercice 18

ABC est un triangle.

E , F et G sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

En utilisant uniquement une règle non graduée, construire les milieux des segments $[AE]$ et $[AG]$.



Exercice 19

Tracer un segment $[EF]$.

Partager, à la règle et au compas, $[EF]$ en trois segments de même longueur.

Exercice 20

Dans la figure ci-contre :

$(AB) \parallel (DC)$.

On suppose que :

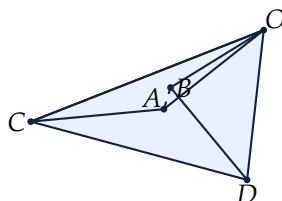
$OD = 9$; $OC = 7$

$OA = x - 1$ et $OB = x$.

1) Calculer x .

2) Montrer que B est le milieu de $[OD]$.

3) Montrer que : $DC = 2AB$.



Exercice 21

$[AB]$ est un segment.

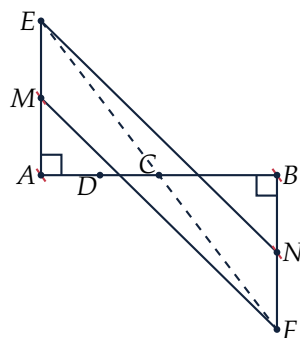
E est un point de la perpendiculaire à (AB) passant par A .

F est un point de la perpendiculaire à (AB) passant par B tel que : $AE = BF$.

M et N sont respectivement les milieux de $[AE]$ et $[BF]$.

La droite (AB) coupe $[EN]$ en D et $[MF]$ en C .

Montrer que : $AC = CD = DB$.



Exercice 22

Dans la figure ci-contre :

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.

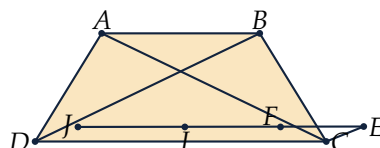
$AB = 4,5$; $BC = 6$; $AC = 7,5$; $BD = 9$; $CE = 2$

La parallèle à la droite (AB) passant par E coupe $[AC]$ en F , $[BD]$ en I et $[AD]$ en J .

1) Calculer EF .

2) a. Montrer que : $BI = 6$

b. En déduire que : $IJ = EF$



Exercice 23

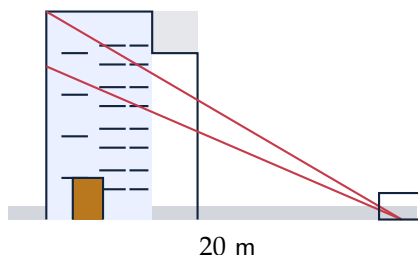
ABC est un triangle. Soit D le milieu de $[AC]$ et E le symétrique de B par rapport à A . Les droites (BD) et (CE) se coupent en F . La parallèle à (BF) passant par A coupe la droite (CE) en G .

Montrer que : $CF = FG = GE$.

Exercice 24

Un immeuble de huit étages a, sur le toit du 6^e étage, une terrasse. Tous ses étages, y compris le rez-de-chaussée, ont la même hauteur.

Un projecteur situé à 20 m de l'immeuble envoie un rayon lumineux qui frôle le sommet du 5^e étage et celui du 8^e étage.



a. Représenter cette situation par une figure géométrique à main levée. Porter les informations données dans l'énoncé.

b. Calculer la largeur de la terrasse.

07

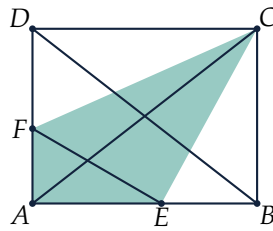
Challenges

Exercice 25

Tracer un segment $[EF]$. Construire, à la règle et au compas, un segment de longueur $\frac{4}{5}EF$.

Exercice 26

$ABCD$ est un rectangle et E est un point de $[AB]$.
La parallèle à la droite (DB) passant par E coupe $[AD]$ en F .
Montrer que les triangles ACE et CAF ont même aire.



08

Avec TICE

Exercice 27

EFG est un triangle isocèle en E .

Soit M un point de $[FG]$ ($M \neq F$ et $M \neq G$).

A est le projeté orthogonal de M sur (EF) .

B est le projeté orthogonal de M sur (EG) .

La parallèle à la droite (BM) passant par F coupe $[EG]$ en C .

1) Montrer que : $MA + MB = FC$

2) Exploiter le dynamisme du logiciel Geogebra pour conjecturer l'égalité demandée en utilisant les icônes suivants :

Polygone

Parallèle

Perpendiculaire

Distance ou longueur

Déplacer le point M pour vérifier que la distance $MA + MB$ est constante.

09

Situations proposées au TIMSS

Voici les trois premières figures d'une forme standard. On construit chaque nouvelle figure en adjoignant une rangée de petits triangles en bas de la figure précédente.



figure 1

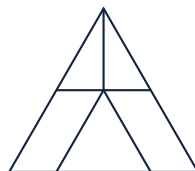


figure 2

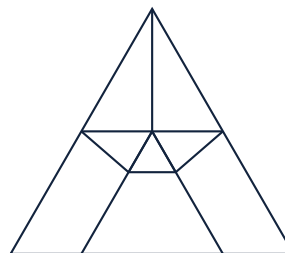


figure 3

a. Compléter la case de la figure 10.

Figure	1	2	3	4	10
Nombre de triangles	1	4	9	16	...

b. Écrire une règle donnant le nombre de petits triangles dans la figure N .