

10

Triangle rectangle et cercle

Reconnaître et utiliser la propriété du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, celle du cercle circonscrit à un triangle rectangle et la définition de la tangente à un cercle en un point.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

Exemple 1 — Droites parallèles et cercle circonscrit

EFG est un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O .

Soit H le projeté orthogonal de E sur (FG) et M le point diamétralement opposé au point F .

Montrer que les droites (EH) et (MG) sont parallèles.

On sait que M est le point diamétralement opposé à F .

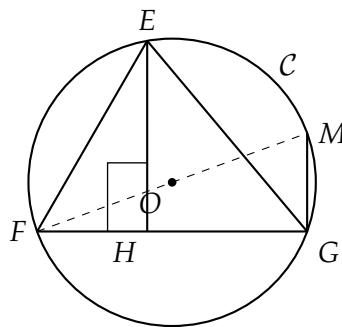
Donc $[MF]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

Or G est un point de $\mathcal{C}$, alors MGF est un triangle rectangle en G .

$(MG) \perp (FG)$.

$(EH) \perp (FG)$ (d'après les données).

Donc : $(MG) \parallel (EH)$.



Exemple 2 — Construire un triangle rectangle connaissant son hypoténuse

Construire un triangle EFG rectangle en E tel que : $FG = 10$ cm et $EF = 4$ cm.

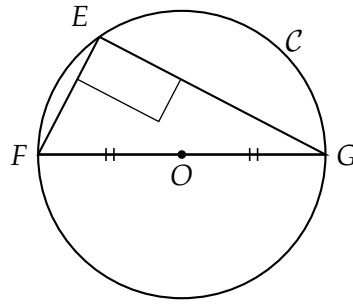
On trace :

- le segment $[FG]$ tel que $FG = 10$ cm.
- O le milieu de $[FG]$.
- $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de diamètre $[FG]$.
- Un point de $\mathcal{C}$ tel que : $EF = 4$ cm.

Le point E répond à la question posée.

On sait que E est un point appartenant au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[FG]$

Donc : EFG est un triangle rectangle en E .



Exemple 3 — Médiane d'un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A .

Soit M est le milieu de $[BC]$, N le projeté orthogonal de M sur (AC) et P le milieu de $[AM]$.
Calculer PN sachant que : $BC = 8,4$ cm.

N est le projeté orthogonal de M sur (AC) .

Donc AMN est un triangle rectangle en N .

Or P est le milieu de l'hypoténuse $[AM]$,

alors : $NP = \frac{1}{2}AM$ ①.

On sait que ABC est un triangle rectangle en A .

Et M est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$.

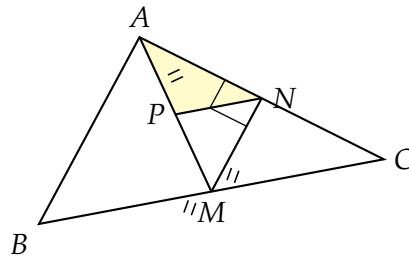
Donc : $AM = \frac{1}{2}BC$ ②

De ① et ②, on déduit que : $NP = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}BC \right)$ c'est-à-dire : $NP = \frac{1}{4}BC$.

Par ailleurs : $BC = 8,4$ cm.

Donc : $NP = \frac{1}{4} \times 8,4$ cm.

D'où : $NP = 2,1$ cm.



Exemple 4 — Construire une perpendiculaire sans équerre

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O .

(Δ) est une droite qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts E et F .

Construire les perpendiculaires à (Δ) en E et F sans utiliser l'équerre.

Justifier.

Soit E' le point d'intersection de la droite (OE) et du cercle $\mathcal{C}$.

Soit F' le point d'intersection de la droite (OF) et du cercle $\mathcal{C}$.

Il en résulte que $[EE']$ et $[FF']$ sont deux diamètres du cercle $\mathcal{C}$.

Donc, les triangles EFF' et EFE' sont deux triangles rectangles respectivement en E et F .

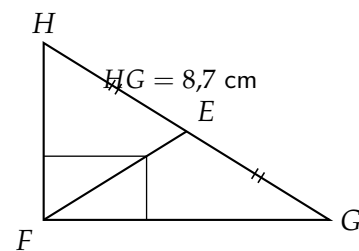
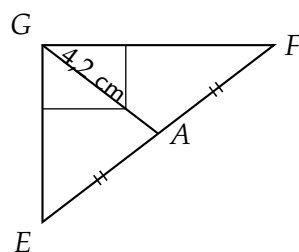
Par conséquent $(EF') \perp (EF)$ et $(E'F) \perp (EF)$

Comme E un point de (Δ) et F un point de (Δ) , alors :

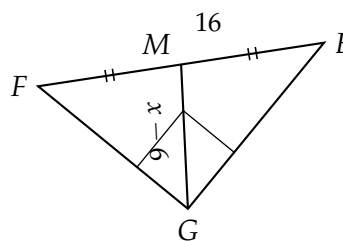
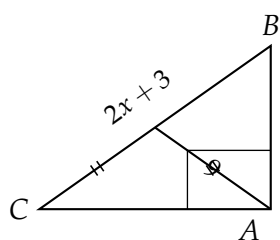
$(EF') \perp (\Delta)$ et $(E'F) \perp (\Delta)$.



A diagram of a triangle EFG . The base is a horizontal line segment FG . Point M is the midpoint of FG , indicated by single tick marks on FM and MG . A line segment EM connects vertex E to point M . Another line segment FG is drawn parallel to EM and half its length, with its endpoints on EF and EG . A label $FG = 7 \text{ cm}$ is placed next to this segment.

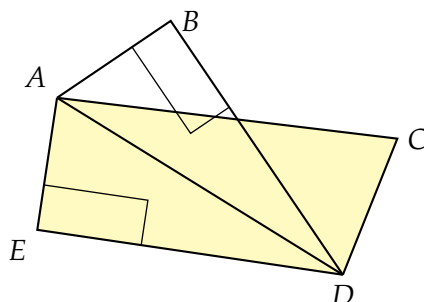


3 / 13



Exercice 4

Expliquer comment on peut construire un cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A , B , D et E .



Exercice 5

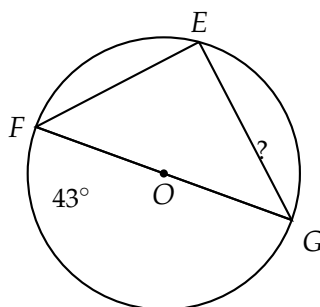
EFG est un triangle isocèle en E . Soit M le milieu de $[EF]$. La parallèle à la droite (FG) passant par M coupe $[EG]$ en N .
Montrer que EFN est un triangle rectangle.

03

Investissement — Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Exercice 6

$[FG]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EFG .
Calculer $\widehat{EGF}$.



04

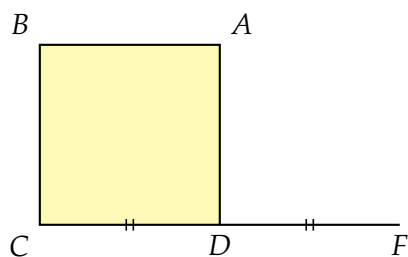
Investissement — Je m'entraîne

Exercice 7

$ABCD$ est un carré.

Soit F le symétrique de C par rapport à D .

Montrer que A appartient au cercle de diamètre $[FC]$.



Exercice 8

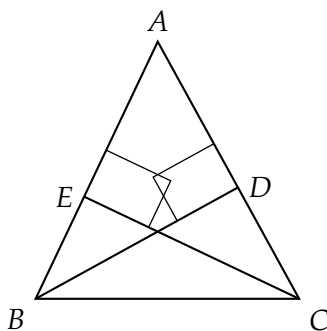
ABC est un triangle.

Soit D le projeté orthogonal de B sur (AC) .

Soit E le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Montrer que B , C , D et E sont des points cocycliques*.

(* appartenant à un même cercle).



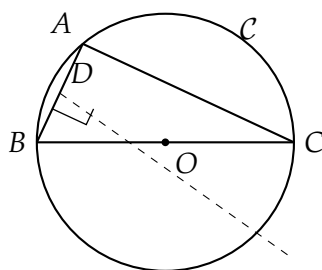
Exercice 9

ABC est un triangle.

Soit $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit de centre O et de diamètre $[BC]$.

La perpendiculaire à la droite (AB) passant par O coupe $[AB]$ en D .

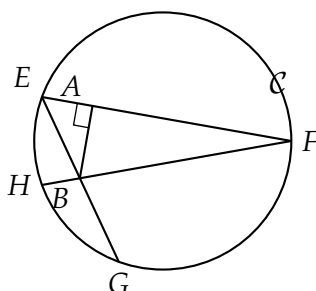
Montrer que D est le milieu de $[AB]$.



Exercise 10

Soit A le projeté orthogonal de B sur (EF) .

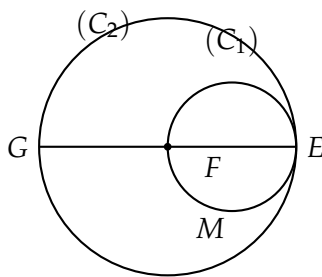
Montrer que les droites (EH) , (AB) et (FG) sont concourantes.



Exercise 11

1) Recopier et compléter la figure ci-dessous.

2) Soit M un point de (C_1) , (Δ) la tangente au cercle (C_2) en G . Les droites (ME) et (MF) coupent respectivement (Δ) en L et N .



Montrer que les droites (LF) et (EN) sont perpendiculaires.

(Noter que $[EF]$ est un diamètre de (C_1))

06

Investissement — Je m'entraîne

Exercise 12

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O .

Soit A et B deux points (non diamétralement opposés) et M le milieu de $[AB]$.

La perpendiculaire en B à la droite (AB) recoupe $\mathcal{C}$ en C .

Montrer que : $BC = 2OM$.

Exercise 13

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.

$\mathcal{C}'$ est le cercle de diamètre $[OB]$.

Soit D un point de $\mathcal{C}'$ distinct de A et de B .

La droite parallèle à (AD) passant par O coupe $[BD]$ en E .

1) Quelle est la nature du triangle BAD ? Justifier.

2) a. Montrer que : $(OE) \perp (BD)$.

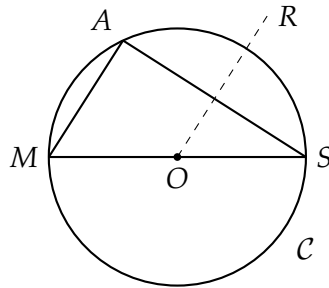
b. En déduire que le point E appartient au cercle $\mathcal{C}'$.

Exercice 14

Sur la figure suivante, $[MS]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

(OR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOS}$.

- 1) Montrer que les droites (AM) et (AS) sont perpendiculaires.
- 2) En déduire que les droites (AM) et (OR) sont parallèles.

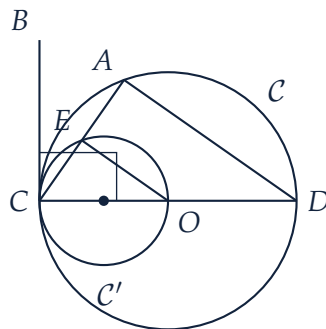


07

Mon bilan

- 1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :

Pour les exercices 1 à 5, on utilise la figure ci-contre : $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[CD]$.



Exercice B1

Le triangle ACD est : ...

A : isocèle, B : rectangle, C : équilatéral.

Exercice B2

Le triangle CDE est : ...

A : isocèle, B : rectangle, C : équilatéral.

Exercice B3

Le centre du cercle $\mathcal{C}'$ est le milieu de : ...

A : $[CD]$, B : $[CA]$, C : $[CO]$.

Exercice B4

Les droites (AD) et (OE) sont ...

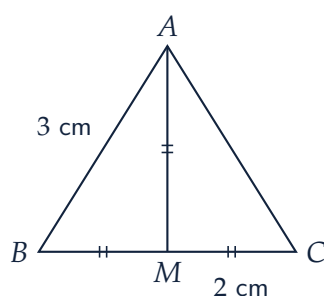
A : perpendiculaires, B : parallèles, C : sécantes.

Exercice B5

La tangente du cercle $\mathcal{C}$ au point C est la droite : ...

A : (OA) , B : (CE) , C : (CB) .

Pour les exercices 6 à 7 on utilise la figure ci-contre :



Exercice B6

Le triangle ABC est : ...

A : isocèle, B : rectangle, C : équilatéral.

Exercice B7

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est : ...

A : B , B : C , C : M .

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Propriété 4	
Ex : 2	Propriété 4	
Ex : 3	Propriété 3	
Ex : 4	Propriété 4	
Ex : 5	Définition	
Ex : 6	Propriété 2	
Ex : 7	Propriété 3	

3) Exercices pour la remédiation voir R10 page : 198.

08

Approfondissement — Je recherche

Pour montrer

Exercice 15

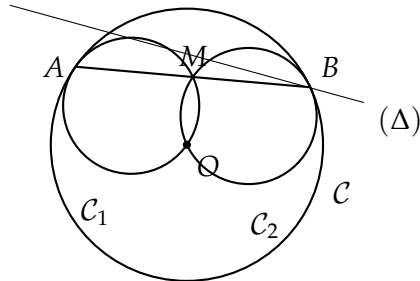
$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O .

Une droite (Δ) coupe $\mathcal{C}$ en A et B , (O n'appartient pas à (Δ)).

Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre $[OA]$ et $\mathcal{C}_2$ le cercle de diamètre $[OB]$.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en O et M .

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.



Exercice 16

Dans la figure ci-dessous :

O est le centre du cercle $\mathcal{C}$.

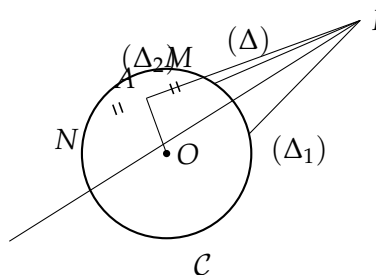
(Δ_1) et (Δ_2) sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$ et sécantes en I .

Une droite (Δ) passant par I coupe $\mathcal{C}$ en M et N .

Soit A le milieu de $[MN]$.

1) Montrer que MAO est un triangle rectangle.

2) En déduire que A appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[OI]$.



Exercice 17

1) Recopier la figure ci-contre :

2) Montrer que : $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

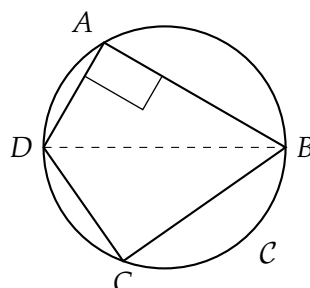
3) Les droites (AD) et (BC) se coupent en E .

Les droites (AB) et (DC) se coupent en F .

Soit I le milieu de $[EF]$.

Montrer que CIA est un triangle isocèle.

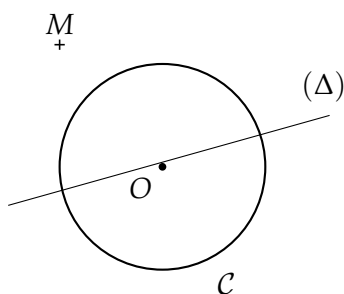
4) Montrer que les droites (DB) et (EF) sont perpendiculaires.



Construction

Exercice 18

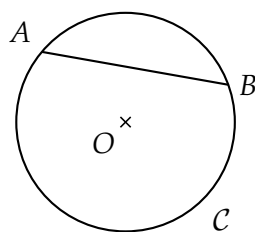
À l'aide d'une règle non graduée, construire la perpendiculaire à la droite (Δ) passant par M .



Exercice 19

$[AB]$ est une corde d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

À l'aide de la règle seulement, construire les perpendiculaires à la droite (AB) en A et B .



Problèmes ouverts

Exercice 20

EFG est un triangle tel que : $EG > EF$.

Soit M le milieu de $[EG]$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$ coupe la droite (FG) en N .

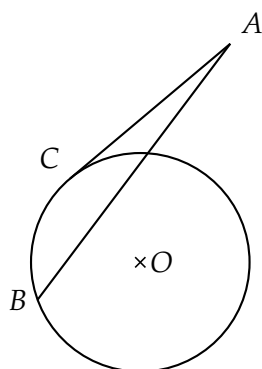
La parallèle à la droite (EF) passant par M coupe (EN) en P .

Montrer que EGP est un triangle rectangle.

Exercice 21

Recopier la figure ci-contre :

Montrer que le cercle de diamètre $[OA]$ coupe $[BC]$ en son milieu D .

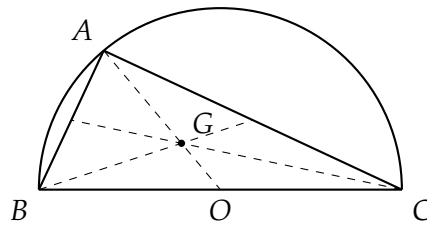


Exercice 22

On donne : $BC = 6$ et $AB = 2$.

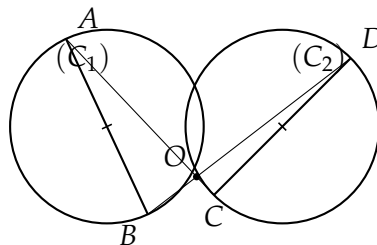
Soit G le centre de gravité du triangle ABC .

- 1) Calculer GA .
- 2) En déduire la nature du triangle GAB .



Exercice 23

À l'aide d'une règle non graduée seulement, construire la perpendiculaire à la droite (BC) passant par O .



Exercice 24

Sur la figure ci-dessous :

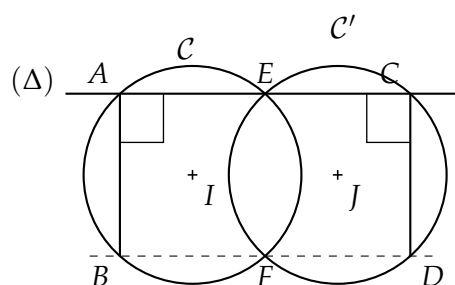
$\mathcal{C}(I; r)$ et $\mathcal{C}'(J; r')$ se coupent en E et F .

La droite (Δ) passant par E recoupe $\mathcal{C}$ en A et $\mathcal{C}'$ en C .

La perpendiculaire à (Δ) passant par A recoupe $\mathcal{C}$ en B .

La perpendiculaire à (Δ) passant par C recoupe $\mathcal{C}'$ en D .

Montrer que les points B , F et D sont alignés.



Exercice 25

$ABCD$ est parallélogramme tel que :

$AB = 8$ et $AD = 5$.

Soit I le milieu de $[CD]$.

Les bissectrices des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{DCB}$ se coupent en J .

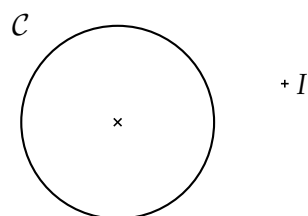
Calculer IJ .

09

Challenges

Exercice 26

Construire les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point I .



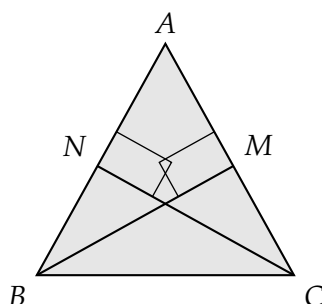
Exercice 27

ABC est un triangle isocèle en A .

Soit M le projeté orthogonal de B sur (AC) .

Soit N le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



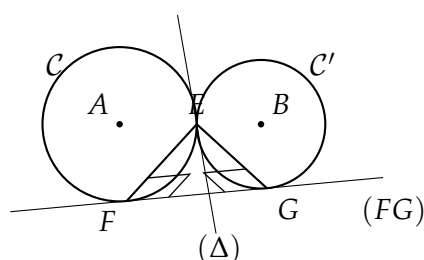
Exercice 28

Sur la figure suivante :

(Δ) est la tangente commune aux deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en E .

La droite (FG) est une tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Montrer que EFG est un triangle rectangle.



10

Situations proposées au TIMSS

On a construit un parcours de 4 mètres de largeur autour d'une fontaine de 10 m de rayon.
Quelle est l'aire du parcours (en mètre carré)?

