

14

Vecteurs et translations

Connaître la notion de vecteur, l'égalité de deux vecteurs, la somme de deux vecteurs, la relation de Chasles, l'opposé d'un vecteur et la translation.

Feuille d'exercices

45 min

Nom : _____

Date : _____

01

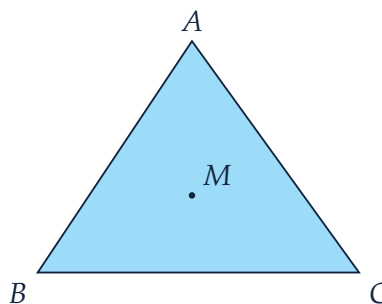
Pratique — J'applique

Utiliser les vecteurs pour démontrer

Exemple 1

M est un point à l'intérieur d'un triangle ABC .

- 1) Construire les parallélogrammes $AMBN$, $AMCP$ et $BMCD$.
- 2) Montrer que $[AD]$, $[BP]$ et $[CN]$ ont même milieu.



Correction

1) Construction des parallélogrammes $AMBN$, $AMCP$ et $BMCD$. (Voir la figure ci-dessous)

2) Montrons que $[AD]$, $[BP]$ et $[CN]$ ont même milieu.

On peut penser à utiliser la définition vectorielle d'un parallélogramme.

$AMBN$ et $AMCP$ sont deux parallélogrammes.

D'où : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Donc : $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{PC}$.

Il en résulte que $NBCP$ est un parallélogramme ;

par conséquent : $[CN]$ et $[BP]$ ont même milieu ①

On a : $AMCP$ et $BMCD$ sont deux parallélogrammes.

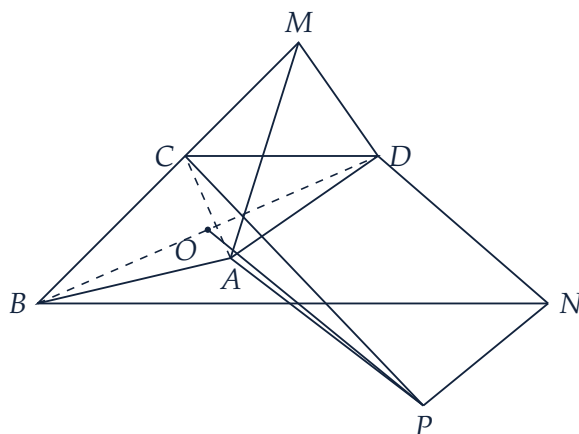
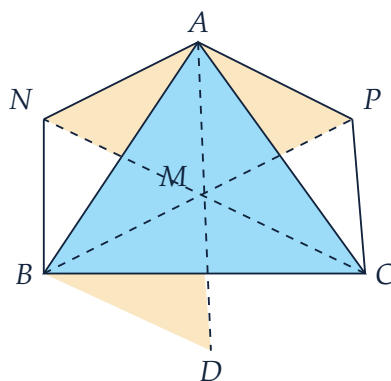
D'où : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BD}$

Donc : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BD}$.

Il en résulte que $APDB$ est un parallélogramme ; par conséquent :

$[AD]$ et $[BP]$ ont même milieu. ②

De ① et ②, on déduit que $[AD]$, $[BP]$ et $[CN]$ ont même milieu.



Exemple 3

$ABCD$ est un parallélogramme.

- 1) Construire le point M image de C par la translation qui transforme B en D .
- 2) Montrer que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$.

Correction**1) Construction de M .**

On sait que M est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

D'où : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BD}$.

Donc $CMDB$ est un parallélogramme.

2) Montrons que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$

$CMDB$ est un parallélogramme.

Donc : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BC}$.

Comme $ABCD$ est un parallélogramme,

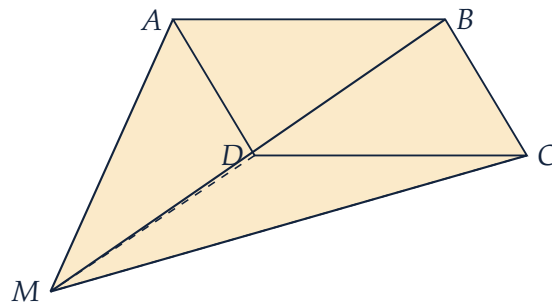
alors : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Ainsi : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$.

Par ailleurs : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}$ (relation de Chasles).

Donc : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$.

D'où : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$.

**02****Investissement — Je m'entraîne****Réviser ton cours****Exercice 1**

Relier par une flèche chaque parallélogramme avec une égalité vectorielle qui lui correspond.

$ACBD$	$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$
$DBAC$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
$DABC$	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$
$ADCB$	$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 2

Utiliser la relation de Chasles pour compléter les égalités suivantes :

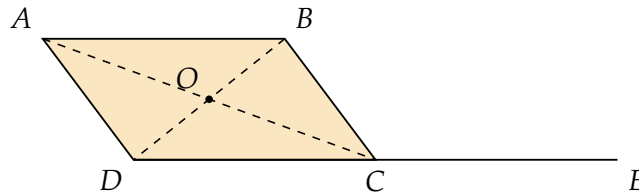
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \dots \quad ; \quad \overrightarrow{MN} + \dots + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MA}$$

$$\begin{aligned}\vec{FG} + \vec{GE} + \vec{EH} &= \dots & ; & & \vec{CI} + \vec{DC} &= \dots \\ \vec{E\dots} + \vec{F\dots} &= \vec{EH} & ; & & \vec{O\dots} + \vec{A\dots} &= \vec{AH} \\ \vec{M\dots} + \vec{A\dots} + \vec{T\dots} &= \vec{AH} & ; & & \vec{AP} + \dots &= \vec{0} \\ \vec{AB} + \dots + \vec{CD} &= \vec{AD} & ; & & \vec{L\dots} + \vec{I\dots} + \vec{V\dots} + \vec{RE} &= \dots\end{aligned}$$

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O et E est le symétrique de D par rapport à C .
Simplifier les expressions suivantes en les justifiant :

$$\begin{aligned}\vec{OC} + \vec{DC} &= \dots & ; & & \vec{EC} + \vec{BA} &= \dots \\ \vec{AO} + \vec{CE} &= \dots & ; & & \vec{EC} + \vec{AO} + \vec{OE} &= \dots \\ \vec{DC} + \vec{BC} + \vec{OA} & & ; & & \vec{AB} - \vec{CE} &= \dots\end{aligned}$$

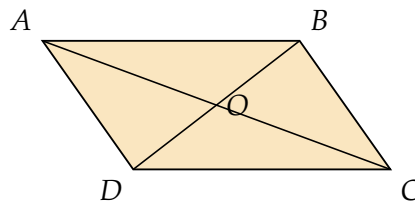


Exercice 4

$ABCD$ un parallélogramme de centre O .
Compléter les phrases suivantes après les avoir recopiées.
 D est l'image de $\dots$ par la translation de vecteur $\vec{BC}$.
 $\dots$ est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{DA}$.
 C est l'image de O par la translation qui transforme $\dots$ en $\dots$.

Exercice 5

Par la translation de vecteur $\dots$, l'image de A est B .



Les vecteurs pour démontrer

Exercice 6

Soient A , B , C et D quatre points quelconques du plan.
Montrer que :

$$3\vec{AB} + 2\vec{CD} = 2\vec{CB} - 3\vec{DA} - \vec{BD}.$$

Exercice 7

E, F, G, H et I sont cinq points du plan tels que :

$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FI}.$$

Montrer que G est le milieu de $[HI]$.

Exercice 8

M est un point n'appartenant pas à la droite (EF) .

Soit A le milieu de $[EF]$.

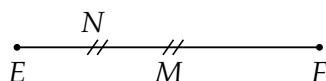
Montrer que : $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MA}$.

Exercice 9

$[EF]$ est un segment.

Soit M le milieu de $[EF]$ et soit N le milieu de $[EM]$.

Montrer que : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EN}$.



Exercice 10

EFG est un triangle.

1) Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}$$

2) Montrer que E est le milieu de $[MN]$.

Exercice 11

ABC est un triangle.

Soit G son centre de gravité et M le milieu de $[BC]$.

1) Montrer que :

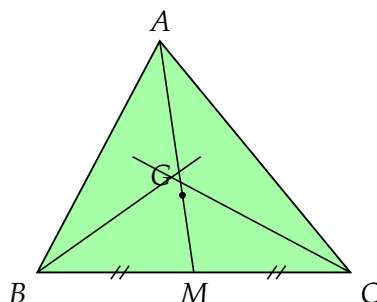
$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$$

2) En déduire que :

a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EG}$

où E est un point quelconque du plan.



• E

Relation de Chasles

Exercice 12

Dans chaque cas, appliquer la relation de Chasles pour écrire le plus simplement les sommes suivantes :

$$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \quad ; \quad 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD}.$$

Exercice 13

Simplifier :

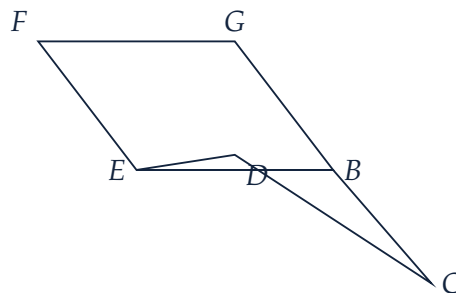
$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HG} \quad ; \quad \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HE} \quad ; \\ \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{EH} \quad ; \quad \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GH} \end{aligned}$$

03

Mon bilan

1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

Pour les exercices ① à ③, on utilise la figure ci-contre où $BEFG$ et $BEDC$ sont des parallélogrammes.



Exercice B1

La droite (BE) est une direction du vecteur ...

$$A : \overrightarrow{EF} \quad B : \overrightarrow{FG} \quad C : \overrightarrow{BC}$$

Exercice B2

La longueur DC est la norme du vecteur : ...

$$A : \overrightarrow{BE} \quad B : \overrightarrow{DE} \quad C : \overrightarrow{FG}$$

Exercice B3

Le sens du vecteur $\overrightarrow{GB}$ est ...

$$A : (BG) \quad B : [BG] \quad C : [GB]$$

Exercice B4

Le vecteur $\overrightarrow{GF}$ est égal à ...

$$A : \overrightarrow{DC} \quad B : \overrightarrow{DE} \quad C : \overrightarrow{FE}$$

Exercice B5

Le vecteur $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}$ est égal à ...

A : $\overrightarrow{EF}$ B : $\overrightarrow{EG}$ C : $\overrightarrow{EC}$

Exercice B6

Le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ est égal à ...

A : $\overrightarrow{AE}$ B : $\overrightarrow{AF}$ C : $\vec{0}$

Exercice B7

L'image de E par la translation qui transforme B en C est : ...

A : D B : C C : B

Correction page : 197

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Définition 1	
Ex : 2	Définition 1	
Ex : 3	Définition 1	
Ex : 4	Définition 2	
Ex : 5	Propriété 2	
Ex : 6	Propriété 3	
Ex : 7	Définition 4	

3) Exercices pour la remédiation voir R14 page : 199

04 **Approfondissement — Je recherche**

Relation de Chasles

Exercice 18

EFGH est un parallélogramme et A un point du plan.

Montrer que : $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AH} = \vec{0}$.

Exercice 19

Démontrer que les points F et H sont confondus sachant que : $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{HG}$

Exercice 20

A, B et C sont trois points du plan.

Exprimer $\vec{U}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\vec{U} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

2) $\vec{U} = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$3) \vec{U} = 2\vec{BC} + 3\vec{AB} + \vec{AC}$$

Exercice 21

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que :

$$\vec{CD} = 2\vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{AE} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$$

Montrer que D et E sont confondus.

La translation pour démontrer

Exercice 22

ABCD est un parallélogramme.

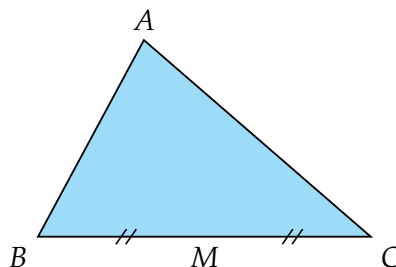
- 1) Construire M tel que : $\vec{DM} = \vec{AC}$.
- 2) Construire le point N image de A par la translation de vecteur $\vec{CB}$.
- 3) Montrer que B est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{DM}$.

Exercice 23

ABC est un triangle.

Soit M le milieu de [BC]

- 1) a. Construire le point D, symétrique du point A par rapport à M.
b. Montrer que : $\vec{DC} = \vec{BA}$.
- 2) Construire le point E, image du point C par la translation de vecteur $\vec{BA}$.



- 3) Montrer que le point C est le milieu du segment [DE].

Exercice 24

EFG est un triangle.

- 1) Construire le point H image de F par la translation de vecteur $\vec{EG}$.
- 2) En déduire la nature du quadrilatère EFHG.
- 3) Soit O le milieu de [FG].
Montrer que : $\vec{EF} + \vec{EG} = 2\vec{EO}$

Exercice 25

ABCD est un parallélogramme.

- 1) Construire le point E image de B par la translation de vecteur $\vec{DC}$.

- 2) Construire le point F image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- 3) Montrer que : $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{DB}$
- 4) En déduire que la droite (EF) passe par le point C.

Exercice 26

$ABCD$ est un rectangle de centre O.

- 1) Simplifier : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$.
- 2) Construire E l'image de D par la translation qui transforme O en A.
- 3) Montrer que $OAED$ est un losange.
- 4) Montrer que B est l'image de A par la translation qui transforme E en O.

Exercice 27

ABC est un triangle.

- 1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
- 2) Construire E l'image de D par la translation qui transforme C en B.
- 3) En déduire que B est le milieu de $[DE]$.
- 4) Simplifier : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EA}$.

Construction**Exercice 28**

EFG est un triangle.

Construire :

- a. le point A tel que : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FG}$.
- b. le point B tel que : $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EG}$.
- c. le point C tel que : $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EF}$.

Exercice 29

ABC est un triangle.

- 1) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$.
- 2) Construire le point F tel que : $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{AC}$.
- 3) Construire le point G tel que : $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{EF}$.

Exercice 30

Soit un triangle ABC

- 1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$
- 2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

Avec TICE

Exercice 31

ABC est un triangle.

- 1) Construire le point E image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- 2) Construire le point F image de A par la translation qui transforme B en C .
- 3) Construire les images des points demandés en utilisant l'outil **GeoGebra** : Translation

Exercice 32

$EFGH$ est un parallélogramme et A un point du plan.

- 1) Construire le point B image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
- 2) Construire le point C image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$.
- 3) Montrer que C est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

05

Challenges

Exercice 33

$ABCD$ est un parallélogramme.

E est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

F est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

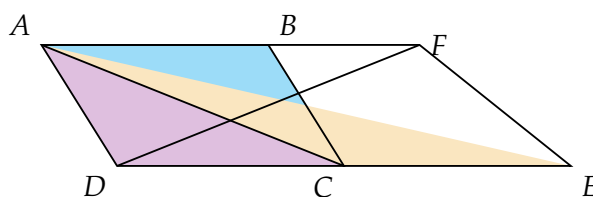
La droite (DE) coupe les segments $[AC]$ et $[BF]$ respectivement en I et J .

Montrer que : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JE}$.

Exercice 34

$ABCD$ est un parallélogramme.

Soit E et F deux points tels que $ABEC$ et $ACFD$ soient deux parallélogrammes.



Montrer que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$

06

Situations proposées au TIMSS

Dessiner un point sur le quadrillage pour que les quatre points soient les sommets d'un parallélogramme.

