

3 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités géométriques

08

Angles au centre et angles inscrits

Reconnaître les angles au centre et les angles inscrits d'un cercle, puis calculer des mesures d'angles et démontrer des propriétés à l'aide des théorèmes du cours.

Feuille d'exercices

60 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

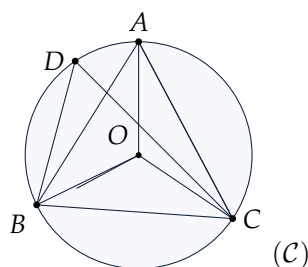
1. Appliquer les propriétés des angles inscrits

Exemple 1 — Calculer des mesures d'angles inscrits

Sur la figure ci-contre, A , B , C et D sont quatre points d'un cercle de centre O tels que :

$$\widehat{BAC} = 34^\circ \quad \text{et} \quad (CD) \perp (OB).$$

Calculer : $\widehat{BOC}$ et $\widehat{DAB}$.

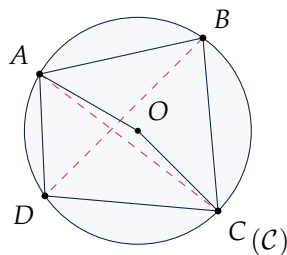


- **Calcul de $\widehat{BOC}$:** On sait que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ intercepte le même arc $\widehat{AB}$ que l'angle au centre $\widehat{BOC}$.
Donc : $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$
Or : $\widehat{BAC} = 34^\circ$,
alors : $\widehat{BOC} = 2 \times 34^\circ$, soit $\widehat{BOC} = 68^\circ$.
- **Calcul de $\widehat{DAB}$:** Soit M le point d'intersection des droites (OB) et (DC) .
Il en résulte que OMC est un triangle rectangle en M (car $(OB) \perp (DC)$).
Donc : $\widehat{OCM} = 90^\circ - \widehat{BOC}$
 $\widehat{OCM} = 90^\circ - 68^\circ$
 $\widehat{OCM} = 22^\circ$.
On sait que : OBC est un triangle isocèle en O .
Donc : $2\widehat{OCB} = 180^\circ - \widehat{BOC}$
 $2\widehat{OCB} = 180^\circ - 68^\circ$
 $2\widehat{OCB} = 112^\circ$
 $\widehat{OCB} = 56^\circ$.
Par conséquent : $\widehat{DCB} = \widehat{OCB} - \widehat{OCM}$
 $\widehat{DCB} = 56^\circ - 22^\circ$
 $\widehat{DCB} = 34^\circ$.
Et comme : $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (angles inscrits interceptant le même arc DB),
alors : $\widehat{DAB} = 34^\circ$.

Exemple 2 — Angles opposés d'un quadrilatère inscrit

$ABCD$ est un quadrilatère dont les sommets sont sur un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O .

- 1) Montrer que : $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$
- 2) Conclure.



1) Montrons que : $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \widehat{DAB} + \widehat{DCB} &= (\widehat{DAC} + \widehat{CAB}) + (\widehat{DCA} + \widehat{ACB}) \\
 &= \frac{1}{2}\widehat{DOC} + \frac{1}{2}\widehat{COB} + \frac{1}{2}\widehat{DOA} + \frac{1}{2}\widehat{AOB} \\
 &= \frac{1}{2}(\widehat{DOC} + \widehat{COB} + \widehat{DOA} + \widehat{AOB}) \\
 &= \frac{1}{2} \times 360^\circ \\
 &= 180^\circ
 \end{aligned}$$

Donc : $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$.

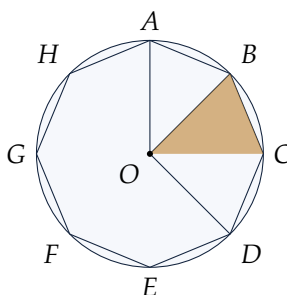
2) Conclusion : Deux angles opposés dans un quadrilatère inscrit dans un cercle sont supplémentaires.

2. Calculer la mesure d'un angle d'un polygone régulier

Exemple 3 — Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$

$ABCDEFGH$ est un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O .

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.



Ce polygone régulier a huit côtés, donc : $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Rappel

On sait que : $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$ où n est le nombre de côtés.

Dans le triangle AOB isocèle en O , on a :

$$\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

De même, on montre que : $\widehat{OBC} = 67,5^\circ$

comme : $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC}$,

alors $\widehat{ABC} = 2 \times 67,5^\circ = 135^\circ$.

Remarque

Pour calculer la mesure de $\widehat{ABC}$, on aurait pu calculer la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc $\widehat{AC}$: cette mesure est : $6 \times 45^\circ = 270^\circ$ donc : $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \times 270^\circ = 135^\circ$.

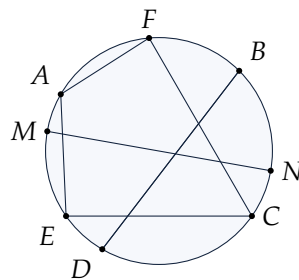
02

Investissement — Je m'entraîne

Calcul d'angle

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, déterminer les angles inscrits qui interceptent l'arc $\widehat{MN}$.

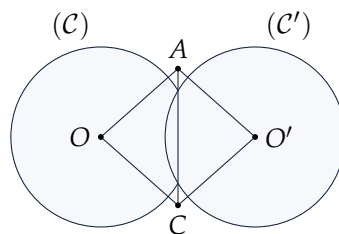


Exercice 2

On donne $\widehat{BAC} = \alpha$.

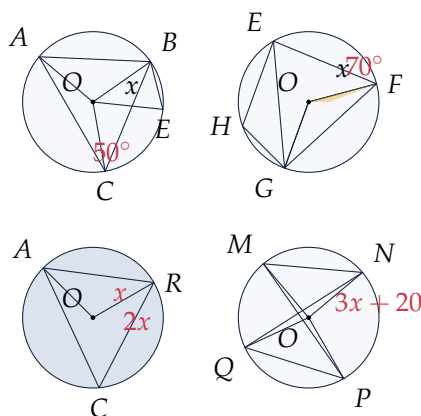
Calculer $\widehat{BOC}$ en fonction de α .

[O est le centre de (C) et O' est le centre de (C')].



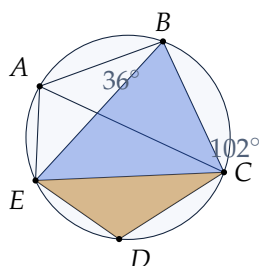
Exercice 3

Calculer x dans chacun des cas suivants :



Exercice 4

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EDC}$.

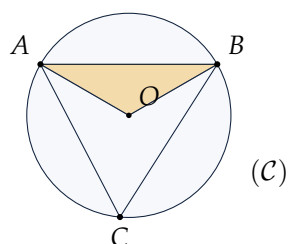


Exercice 5

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O .

A, B et C sont des points de $(\mathcal{C})$ tels que : $\widehat{AOC} = 130^\circ$.

Calculer chacun des angles du triangle ABC .

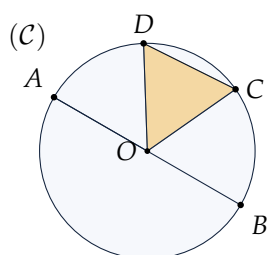


Exercice 6

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O , de diamètre $[AB]$.

C et D sont des points de $(\mathcal{C})$ tels que : $\widehat{DOC} = \widehat{AOD} = 35^\circ$.

Calculer $\widehat{BCD}$.

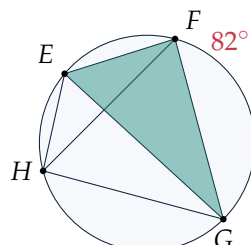


Exercice 7

Avec TICE

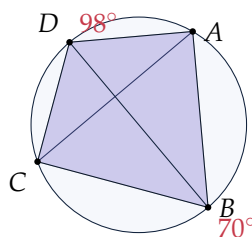
E, F, G et H sont des points d'un cercle tels que : $\widehat{EFG} = 82^\circ$.

1. Exploiter le dynamisme de logiciel Geogebra pour conjecturer la mesure de l'angle demandée, en utilisant les icônes suivantes : Polygone ► Cercle (centre-point) ► Angle.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EHG}$.



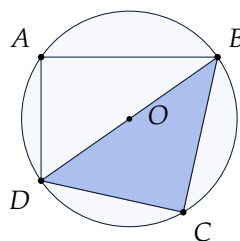
Exercice 8

A, B, C et D sont des points cocycliques (appartenant à un même cercle) tels que : $\widehat{BAD} = 98^\circ$ et $\widehat{ABC} = 70^\circ$.
Calculer $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC}$.



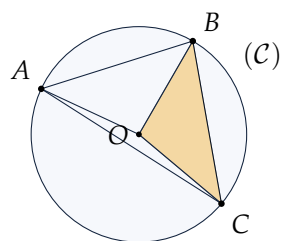
Exercice 9

$ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O tel que : $\widehat{BOD} = 126^\circ$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.



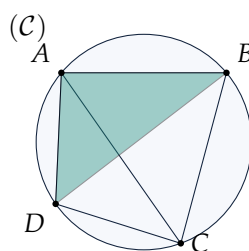
Exercice 10

A, B et C sont des points d'un cercle de centre O tels que : $\widehat{BAC} = 36^\circ$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CBO}$.



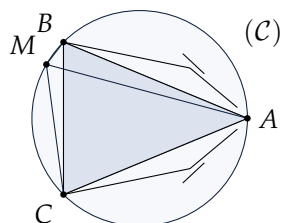
Exercice 11

A , B et C sont des points d'un cercle de centre O tels que : $\widehat{ABC} = 80^\circ$ et $\widehat{ABD} = 136^\circ$.
Calculer : $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ACB}$.



Exercice 12

ABC est un triangle isocèle et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit.
Soit M un point de l'arc $\widehat{BC}$ qui ne contient pas le point A .
Montrer que $[MA)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{CMB}$.



Mon bilan

Exercice 1

1) Indiquer la bonne réponse par A , B ou C :

	A	B	C
1) À quelle figure correspond l'égalité suivante : $\widehat{KIM} = \frac{1}{2}\widehat{KOM}$	$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre L	$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre N	$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O
2) O désigne le centre du cercle $\widehat{ABC} = 20^\circ$ sur la figure ...			
3) A , N et I sont trois points d'un cercle de centre O et $\widehat{KOI} = 36^\circ$. Alors :	$\widehat{IAN} = 54^\circ$	$\widehat{IAN} = 72^\circ$	$\widehat{IAN} = 108^\circ$
4) À quelle figure correspond l'égalité : $\widehat{BMC} = \widehat{BAC}$			

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Propriété 1	
Ex : 2	Propriété 1	
Ex : 3	Propriété 1	
Ex : 4		Propriété 2

3) Exercices pour la remédiation voir R8 page : 248

Corrections page : 247

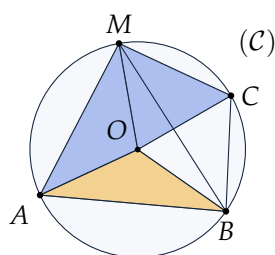
03

Approfondissement — Je recherche

S'initier à la démonstration

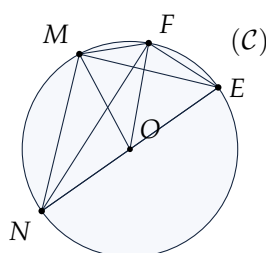
Exercice 13

M, A, B et C sont des points d'un cercle (C) de centre O tels que : $\widehat{BOA} = \widehat{COB}$.
Montrer que $[MB]$ est bissectrice de l'angle $\widehat{MAC}$.



Exercice 14

Sur la figure suivante :



Recopier et compléter le tableau suivant :

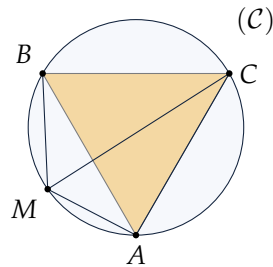
Angles inscrits	Angles au centre associés
$\widehat{NME}$	...
$\widehat{NMF}$	...
...	$\widehat{EOF}$
...	$\widehat{MOF}$

Exercice 15

$(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC .

Soit M un point de $(\mathcal{C})$.

Montrer que $[MC)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

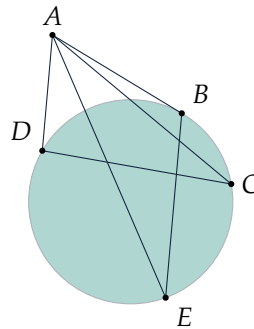


Exercice 16

B, C, D et E sont des points d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r .

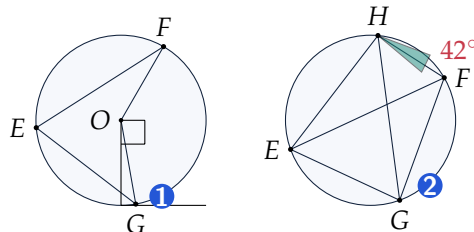
Soit A un point tel que : $OA > r$.

Montrer que : $\widehat{ADC} = \widehat{ABE}$.



Exercice 17

Calculer $\widehat{EFG}$ dans chacun des cas suivants :



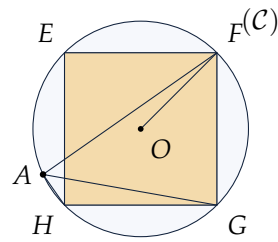
Calcul d'angle

Exercice 18

$EFGH$ est un carré inscrit dans un cercle de centre O .

Soit A un point de ce cercle (figure).

Calculer les mesures des angles $\widehat{GAF}$ et $\widehat{FAH}$.



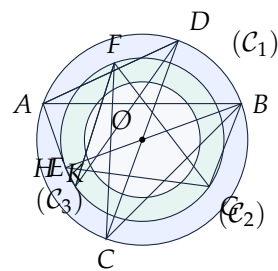
Exercice 19

Sur la figure ci-contre :

$(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ sont des cercles concentriques de centre O .

(BD) et (FH) sont sécantes en O .

Montrer que : $\widehat{BAH} = \widehat{FGC} = \widehat{FED}$.

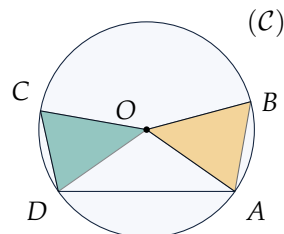


Exercice 20

Sur la figure ci-contre :

$[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{COA}$ tel que : $\widehat{BOA} = 28^\circ$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OCA}$.

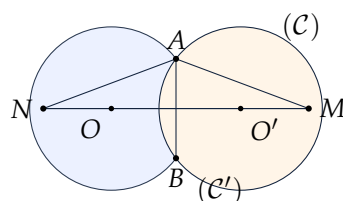


Exercice 21

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles de centres O et O' .

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en M et N tels que : $\widehat{MON} = 134^\circ$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$.



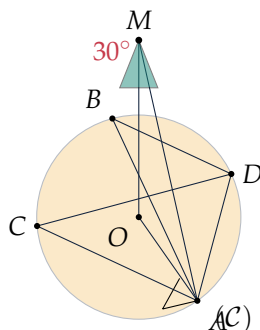
Exercice 22

Sur la figure ci-contre :

A, B, D et C sont des points sur un cercle (C) de centre O .

(MA) est la tangente au cercle (C) en A tel que : $\widehat{OMA} = 30^\circ$.

Calculer les mesures des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.



Problèmes ouverts

Exercice 23

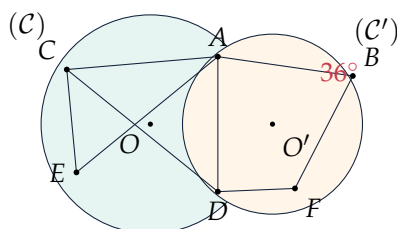
(C) et (C') sont deux cercles sécants en A et D .

E et C sont deux points de (C) .

B et F sont deux points de (C') tels que :

$(AB) \parallel (DC)$ et $\widehat{DFB} = 36^\circ$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AEC}$.

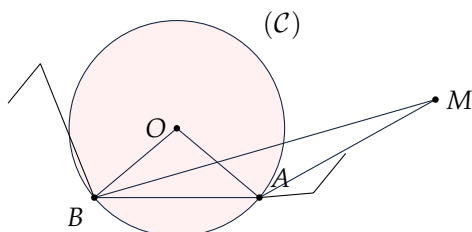


Exercice 24

A et B sont deux points d'un cercle (C) .

Les tangentes en A et B au cercle (C) se coupent en M .

Montrer que le triangle MAB est isocèle.

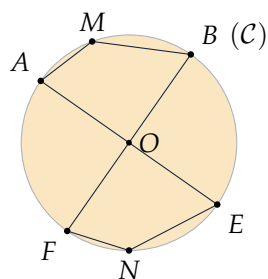


Exercice 25

Sur la figure ci-contre : $[AE]$ et $[BF]$ sont deux diamètres d'un cercle (C) de centre O .

M et N sont deux points de (C) .

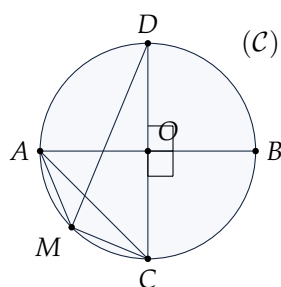
Montrer que : $\widehat{ENF} = \widehat{AMB}$.



Exercice 26

Sur la figure ci-contre : $[AB]$ et $[DC]$ sont deux diamètres perpendiculaires en O d'un cercle $(\mathcal{C})$. M est un point de $(\mathcal{C})$.

Montrer que : $\widehat{AMC} = \frac{3}{2}\widehat{DOB}$.



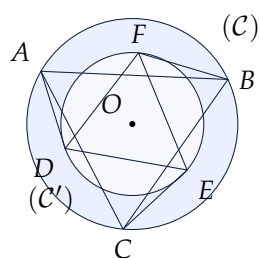
04

Challenges

Exercice 27

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles concentriques (même centre O).

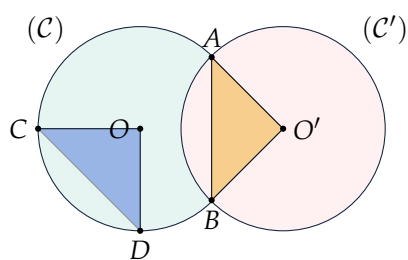
Montrer que : $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.



Exercice 28

On considère la figure ci-contre.

Montrer que : $\widehat{DOC} = \widehat{BO'A}$.



Exercice 29

On considère la figure ci-dessous :

(C) est un cercle de diamètre $[AB]$.

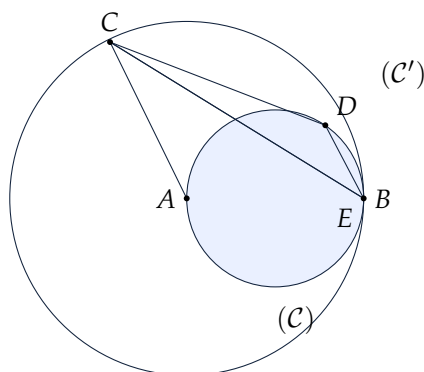
(C') est le cercle de centre A et de rayon AB .

Soit C un point du cercle (C') .

La droite (AC) recoupe (C) en E .

La droite (BC) recoupe (C) en D .

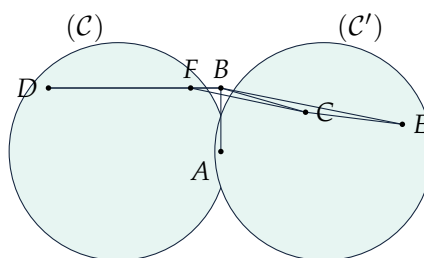
Montrer que le triangle CDE est isocèle.



Exercice 30

On considère la figure ci-contre.

Montrer que : $\widehat{DBF} = \widehat{EBC}$.



Exercice 31

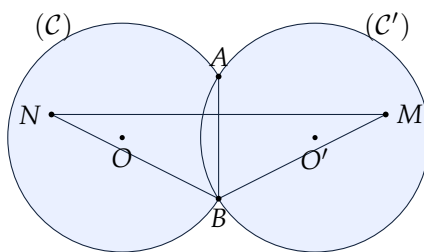
Sur la figure ci-contre :

(C) et (C') de même rayon se coupent en A et B .

O est le centre de (C) et O' celui de (C') .

Une droite passant par A recoupe (C) en N et (C') en M .

Démontrer que BMN est un triangle isocèle.

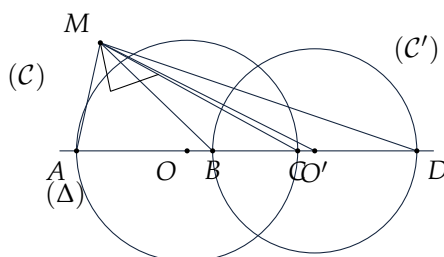


Exercise 32

Soit A, B, C et D quatre points distincts, alignés dans cet ordre sur une droite (Δ) , $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[BD]$ et M un de leurs points d'intersection.

On suppose que la tangente en M à $(\mathcal{C})$ passe par le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

Montrer que (MB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.



05

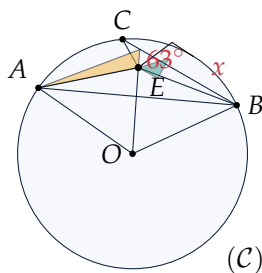
Situations proposées aux olympiades

Exercise 1

Dans la figure ci-contre :

- $(AO) \parallel (BC)$
- $\widehat{AEC} = 63^\circ$

Calculer x .



06

Je me prépare à l'examen local

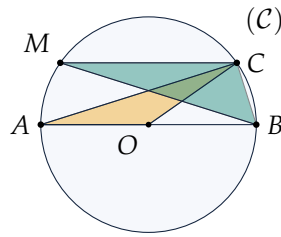
Exercice 33 — Exercice résolu

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.

Soit C un point de $(\mathcal{C})$ tel que : $\widehat{ABC} = 30^\circ$ et M un point de l'arc $\widehat{AB}$ qui ne contient pas C .

1) Montrer que OAC est un triangle équilatéral.

2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BMC}$.



Correction : 33

1) Nature du triangle OAC .

L'angle au centre $\widehat{AOC}$ est associé à l'angle inscrit $\widehat{ABC}$ car ils interceptent le même arc $\widehat{AC}$.

Donc : $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$

Or : $\widehat{ABC} = 30^\circ$, alors :

$\widehat{AOC} = 2 \times 30^\circ$ soit $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Et comme $OA = OC$ (rayons de (C)),

alors OAC est un triangle équilatéral.

(triangle isocèle ayant un angle de 60° de mesure).

2) Calcul de $\widehat{BMC}$.

ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$. Donc ABC est un triangle rectangle en C .

Comme $\widehat{ABC} = 30^\circ$, alors $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

On sait que les angles inscrits $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BAC}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$.

Donc : $\widehat{BMC} = \widehat{BAC}$.

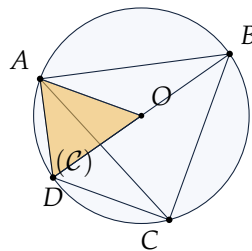
D'où : $\widehat{BMC} = 60^\circ$.

Exercice 34

Sur la figure ci-contre :

$\widehat{ACD} = 40^\circ$ et $\widehat{BAC} = 24^\circ$.

Déterminer la mesure de chacun des angles suivants : $\widehat{DOA}$, $\widehat{BDC}$ et $\widehat{DBA}$.

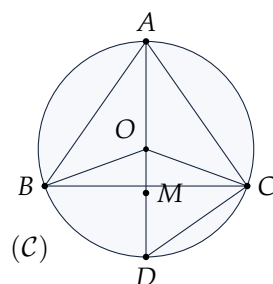


Exercice 35

ABC est un triangle isocèle en A et (C) son cercle circonscrit de centre O .

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en M et recoupe (C) en D .

Montrer que : $\widehat{DAC} = \widehat{DCM}$.

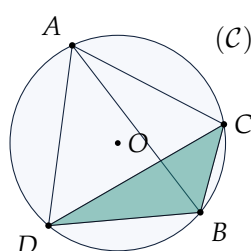


Exercice 36

ABD est un triangle et (C) son cercle circonscrit de centre O .

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ recoupe (C) en C .

Montrer que BCD est un triangle isocèle.



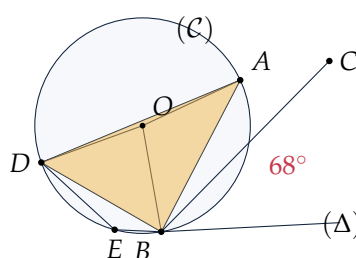
Exercice 37

Sur la figure ci-contre :

A , B , D et E sont des points d'un cercle (C) de centre O tels que : $\widehat{BED} = 68^\circ$.

C est un point de la tangente (Δ) à (C) en B .

Calculer $\widehat{DBC}$, $\widehat{DOA}$ et $\widehat{DBA}$.

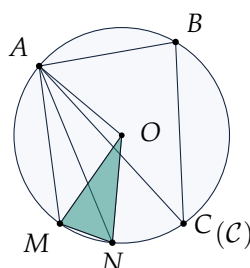


Exercice 38

Sur la figure suivante :

M , B et N sont des points d'un cercle (C) de centre O tels que : $\widehat{ANB} = 32^\circ$ et $\widehat{MAN} = 38^\circ$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MON}$.



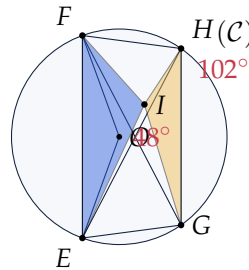
Exercice 39

Sur la figure suivante :

E, F, H et G sont des points d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O tel que : $\widehat{GFH} = 102^\circ$.

Les droites (HF) et (EG) se coupent en I tel que : $\widehat{FIG} = 48^\circ$.

Calculer $\widehat{EOF}$ et $\widehat{EHF}$.



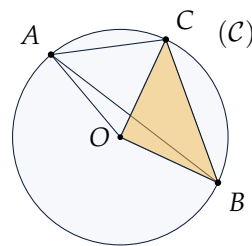
Exercice 40

Sur la figure ci-contre :

A, B et C sont des points d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O .

$\widehat{BOC} = 90^\circ$ et $\widehat{BOA} = 130^\circ$.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.



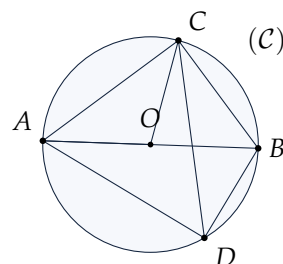
Exercice 41

Sur la figure ci-contre :

A, B, C et D sont des points d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de diamètre $[AB]$.

On donne : $\widehat{AOC} = 124^\circ$.

Calculer les mesures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$.



Exercice 42

Soient O et O' les centres respectifs de deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sécants en deux points A et B .

On considère un point M du cercle $(\mathcal{C})$ tel que :

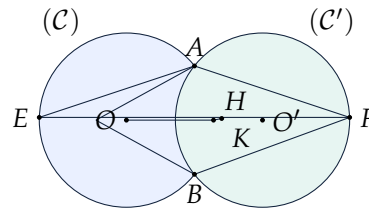
- (MA) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en E ;
- (MB) recoupe le cercle $(\mathcal{C}')$ en F .

1) La droite (MO) recoupe $(\mathcal{C})$ en H , et coupe la droite (EF) en K .

a. Montrer que : $\widehat{AEK} = \widehat{MBA}$ et $\widehat{MBA} = \widehat{MHA}$

b. En déduire que : $\widehat{AEK} + \widehat{AHK} = 180^\circ$.

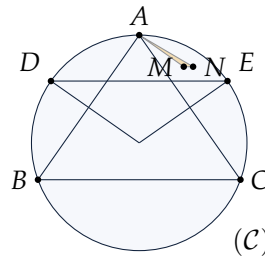
2) Sachant que les points A, E, K et H se trouvent sur un même cercle, montrer que (MO) et (EF) sont perpendiculaires.



Exercice 43

A, B et C étant trois points d'un cercle (C) , D est le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ et E est le milieu de l'arc $\widehat{AC}$. (DE) coupe (AB) et (AC) respectivement en M et N .

Montrer que $AM = AN$.



Exercice 44

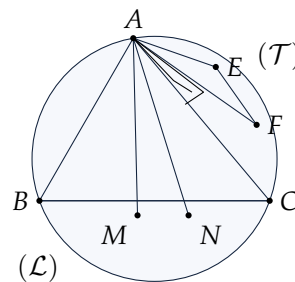
ABC est un triangle et $(\mathcal{L})$ son cercle circonscrit.

On considère deux points M et N du segment $[BC]$ tels que : $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$.

Soit $(\mathcal{T})$ le cercle circonscrit au triangle AMN .

Le cercle $(\mathcal{T})$ recoupe (AB) et (AC) respectivement en E et F .

Montrer que (EF) et (BC) sont parallèles.



Exercice 45

ABC est un triangle équilatéral.

Soit (Δ) une droite parallèle à (AB) et coupant (BC) et (AC) respectivement en M et H .

La parallèle à (AC) issue de M coupe (AB) en K .

Soit $(\mathcal{L})$ le cercle circonscrit au triangle MHK .

Le cercle $(\mathcal{L})$ recoupe (AC) en N , et recoupe (AB) en P .

Montrer que MNP est un triangle équilatéral.

