

3 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités numériques

03

Racines carrées

Connaître la racine carrée d'un nombre réel positif, résoudre une équation du type « carré égal à un réel » et utiliser les opérations sur les racines carrées.

Feuille d'exercices

60 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

1. Écrire un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ Exemple 1 — Écrire les nombres E et F sous la forme $a\sqrt{b}$

Écrire les nombres E et F sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels, b étant le plus petit possible.

$$E = \sqrt{48} \quad ; \quad F = \sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18}$$

Pour E — On a : $E = \sqrt{48}$.

On écrit 48 sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est le plus grand carré entier possible.

On a : $48 = 4 \times 12 = 4 \times 4 \times 3 = 4^2 \times 3$.

Donc : $E = \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3}$.

D'où : $E = 4\sqrt{3}$.

Pour F — On a : $F = \sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18}$.

On prend le petit radicande : 18.

On a : $18 = 9 \times 2$.

S'il existe un facteur commun, ça ne peut être que $\sqrt{2}$.

On divise les autres radicandes par 2 :

$$32 : 2 = 16 \quad \text{et} \quad 50 : 2 = 25.$$

Donc :

$$F = \sqrt{16 \times 2} + 3\sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$F = 4\sqrt{2} + 3 \times 5\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$F = (4 + 15 - 6)\sqrt{2}$$

D'où : $F = 13\sqrt{2}$.

2. Rendre rationnel

Exemple 2 — Écrire le nombre A sans radical au dénominateur

Écrire le nombre A sans radical au dénominateur :

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

On a :

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

On multiplie chaque terme de A par l'expression conjuguée du dénominateur.

$$A = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$A = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$A = \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2(2 \times \sqrt{3})}{4 - 3} - \frac{2 - \sqrt{6}}{2 - 3}$$

$$A = \frac{4 + 3 + 4\sqrt{3}}{1} - \frac{2 - \sqrt{6}}{-1}$$

$$A = 7 + 4\sqrt{3} + 2 - \sqrt{6}$$

Donc : $A = 9 + 4\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

3. Résoudre une équation

Exemple 3 — Résoudre une équation

Résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt{3}(x^2 - 3) - (x^2 - 3)(x - 2\sqrt{3}) = 0.$$

On a : $\sqrt{3}(x^2 - 3) - (x^2 - 3)(x - 2\sqrt{3}) = 0$.

On factorise par $x^2 - 3$, on obtient :

$$(x^2 - 3) [\sqrt{3} - (x - 2\sqrt{3})] = 0$$

$$(x^2 - 3) (\sqrt{3} - x + 2\sqrt{3}) = 0$$

$$(x^2 - 3) (-x + 3\sqrt{3}) = 0$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Donc :

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad -x + 3\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 = 3 \quad \text{ou} \quad x = 3\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 3\sqrt{3}$$

D'où : $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ et $3\sqrt{3}$ sont les solutions de l'équation proposée.

Pour réviser son cours

Exercice 1

Recopier et relier chaque nombre de la 1^{re} colonne à son carré de la 2^{ème} colonne.

7	•	•	81
-3	•	•	121
-0,4	•	•	49
5 ²	•	•	0,16
9	•	•	9
11	•	•	10 ⁻⁶
10 ⁴	•	•	1600
2 ² + 6 ²	•	•	5 ⁴

Exercice 2

Recopier et compléter les égalités suivantes :

$$\sqrt{\dots} = 25 \quad ; \quad \sqrt{1,96} = \dots$$

$$\sqrt{(\dots)^2} = 111 \quad ; \quad \sqrt{\frac{36}{\dots}} = \frac{13}{\dots}$$

$$\sqrt{(\dots)^2} = 0,07 \quad ; \quad -\sqrt{81} = \dots$$

Exercice 3

Recopier et relier les nombres égaux.

$\sqrt{28}$	•	•	$2\sqrt{7}$
$\sqrt{72}$	•	•	$6\sqrt{3}$
$\sqrt{20}$	•	•	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{27}$	•	•	$3\sqrt{6}$
$\sqrt{54}$	•	•	$2\sqrt{5}$
$\sqrt{108}$	•	•	$6\sqrt{2}$

Exercice 4

Calculer :

$$\sqrt{98} \quad ; \quad \sqrt{(4\sqrt{3})^2} \quad ; \quad -5\sqrt{(\sqrt{11})^2} \quad ; \quad \sqrt{(-8)^2} \quad ; \quad \sqrt{0,04a^6}$$

$$\sqrt{100} - \sqrt{16} \quad ; \quad \sqrt{(169 - 25)^2} \quad ; \quad \sqrt{64 + 6^2} \quad ; \quad \sqrt{\left(\frac{2017}{2016}\right)^2}$$

$$\sqrt{3^2 \times 7^4} \quad ; \quad \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \quad ; \quad \sqrt{\frac{0,49 \times 0,09}{0,81 \times 0,36}}$$

Exercice 5

a est un nombre réel positif. **Simplifier** :

$$1) \sqrt{36a^2}$$

$$2) \sqrt{144a^2 + 25a^2}$$

$$3) \sqrt{\frac{a^2}{16}} + \sqrt{\frac{a^2}{9}}$$

$$4) \sqrt{225a^2} - \sqrt{121a^2}$$

Exercice 6

Sachant que : $567^2 = 321\,489$, calculer mentalement :

$$\sqrt{321\,489} \quad ; \quad \sqrt{32,1489} \quad ; \quad \sqrt{32\,148\,900}.$$

Exercice 7

Écrire chacun des nombres donnés sans radical.

$$\sqrt{0,0081} \quad ; \quad \sqrt{144} \quad ; \quad \sqrt{13^2} \quad ; \quad \sqrt{(-10)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{0,04}{625}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1,21}{0,64}}$$

Exercice 8

Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un rationnel positif.

$$5\sqrt{3} \quad ; \quad 2\sqrt{7} \quad ; \quad 6\sqrt{6} \quad ; \quad \frac{3}{4}\sqrt{32} \quad ; \quad 13\sqrt{7} \quad ; \quad 7\sqrt{\frac{338}{14}}$$

Exercice 9

Calculer les produits suivants :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} \quad ; \quad \sqrt{7} \times \sqrt{28} \quad ; \quad \sqrt{19} \times \sqrt{76}$$

$$\sqrt{50} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{9}{10} \times \frac{40}{81}} \quad ; \quad \sqrt{55} \times \sqrt{33} \times \sqrt{15}$$

Exercice 10

On donne :

$$a = (\sqrt{5} - 1)^2 \quad ; \quad b = (\sqrt{2} + 1)^2 \quad ; \quad c = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{2} + 1)$$

Calculer A : $A = \sqrt{a + 2c + b}$.

Rendre rationnel

Exercice 11

Rendre rationnel les dénominateurs des nombres suivants :

$$\begin{aligned} 1) & \frac{2}{\sqrt{3}} ; \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} ; \frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}} ; \frac{-1+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \\ 2) & \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3} ; \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} ; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{7}+\sqrt{12}} ; \frac{\sqrt{48}-2\sqrt{75}}{\sqrt{27}+\sqrt{12}} \\ 3) & \frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} ; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Exercice 12

Rendre rationnel les dénominateurs des nombres suivants puis calculer :

$$a = \frac{3\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} ; \quad b = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Résoudre une équation**Exercice 13**

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1) & 4x^2 - 3 = 13 & 2) & 7x^2 - 2 = 3x^2 + 2 \\ 3) & x^2 + 9 = 0 & 4) & x^2 = (\sqrt{3}+1)^2 \end{aligned}$$

Exercice 14

- 1) Calculer : $(7-2\sqrt{2})^2$.
- 2) En déduire : $\sqrt{57-28\sqrt{2}}$.
- 3) Résoudre l'équation : $x^2 = 57-28\sqrt{2}$.

Exercice 15

Déterminer x et y dans les cas suivants :

- a) $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{y^2-1} = 0$
- b) $x - \sqrt{2} + \sqrt{2-x} + 5 = y$

Exercice 16

Résoudre l'équation :

$$x \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Calculatrice**Exercice 17**

- 1) Exercice à faire d'abord avec la calculatrice puis sans la calculatrice :

Montrer que $\sqrt{2}$ et $\frac{10}{7}$ sont voisins, mais pas égaux.

2) Avec la calculatrice, comparer à présent

$$a, \sqrt{2} \text{ et } \frac{19\,601}{13\,860} \quad b, \sqrt{2} \text{ et } \frac{768\,398\,401}{543\,339\,720}$$

3) Pour démontrer que $\frac{19\,601}{13\,860} \neq \sqrt{2}$:

a) Calculer d'abord le carré de 19 601 à l'aide des produits remarquables :

$$(19\,601)^2 = (19\,600 + 1)^2 = \dots$$

b) Calculer $13\,860^2$, puis en déduire $13\,860^2$.

c) En déduire que : $\frac{19\,601}{13\,860} \neq \sqrt{2}$.

4) En faisant de simples considérations sur la parité du dénominateur, démontrer que $\sqrt{2} \neq \frac{768\,398\,401}{543\,339\,720}$.

Mon bilan

Exercice 1

Indiquer la bonne réponse par A, B ou C.

	A	B	C
1) La racine carrée de 16 est ...	8	4	-4
2) $\sqrt{(-3)^2}$ est égale à ...	est égale à 3	est égale à -3	n'existe pas
3) $\sqrt{45}$ est égale à ...	$5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
4) $\sqrt{\frac{27}{48}}$ est égale à ...	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
5) $\sqrt{3} \times \sqrt{14}$ est égale à ...	$3\sqrt{14}$	$\sqrt{42}$	$7\sqrt{12}$
6) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ est égale à ...	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\frac{1}{7}\sqrt{7}$
7) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ est égale à ...	$7+4\sqrt{3}$	$7-4\sqrt{3}$	1
8) L'équation $x^2 = 6$...	admet deux solutions distincts	admet une seule solution	n'a pas de solution

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

Savoir	Pratique	Savoir	Pratique
Ex. 1	Définition	Ex. 6	Propriété 3
Ex. 2	Définition	Ex. 7	Exemple 2
Ex. 3	Propriété 2	Ex. 8	Propriété 1
Ex. 4	Propriété 3		
Ex. 5	Propriété 1		

3) Exercices pour la remédiation voir R3 page : 248

03

Approfondissement — Je recherche

Simplification

Exercice 18

a et b sont deux nombres réels positifs non nuls. **Simplifier** :

$$A = \sqrt{\frac{25a^2}{9}} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{ba}$$

$$C = \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{\frac{a}{b}} \quad ; \quad D = \sqrt{b^2} \times \sqrt{ab} \times \sqrt{b}$$

$$E = \frac{\sqrt{ba} \times \sqrt{ab^3} \times (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab^3} \times \sqrt{ba^6}}$$

Exercice 19

Simplifier :

$$D = 3\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{72} + 3\sqrt{128}$$

$$E = 2\sqrt{80} - 4\sqrt{45} + \sqrt{20}$$

$$G = \sqrt{125} - 3\sqrt{45} - \sqrt{20} - 2\sqrt{80}$$

$$H = \sqrt{36a} - \sqrt{64a} + 2\sqrt{16a} \quad (a > 0)$$

$$I = 2\sqrt{25ab^2} + \sqrt{16ab^2} - 4\sqrt{9ab^2} \quad (a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$J = \sqrt{961} - \sqrt{729}$$

$$K = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$$

Exercice 20

Simplifier :

$$N = \sqrt{49} + \sqrt{2} - 3\sqrt{25}$$

$$M = (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3) + (\sqrt{5} + 2)^2$$

$$O = \sqrt{7} + 2\sqrt{6} \times \sqrt{7} - 2\sqrt{6}$$

$$P = \sqrt{20} - 8\sqrt{6} \times \sqrt{45} + 18\sqrt{6}$$

$$Q = 2\sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{10} + \sqrt{2}$$

Exercice 21

Écrire les nombres donnés sans radical.

$$X = \sqrt{17 + \sqrt{60 + \sqrt{14 + \sqrt{4}}}}$$

$$Y = \sqrt{75 + \sqrt{41 - \sqrt{3^2 + \sqrt{16^2}}}}$$

$$Z = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$$

$$W = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

Exercice 22

On considère l'expression : $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

- 1) Calculer a^2 .
- 2) En déduire une écriture simplifiée de a .

Développement**Exercice 23**

Soit : $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

- 1) Calculer a^2 , b^2 , $a \times b$.
- 2) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est un entier relatif.
- 3) Simplifier $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

Exercice 24

a et b sont deux nombres réels positifs tels que $a \geq b$.

Montrer que :

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = 2\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}$$

Exercice 25

a et b sont deux nombres réels positifs.

Montrer que :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2(a + b)$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 4\sqrt{ab}$$

Exercice 26

a et b sont deux nombres réels tels que : $a > 1$ et $b \geq 0$.

Montrer que :

$$\sqrt{b} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{2a}{1+a^2}} + \sqrt{1 - \frac{2a}{1+a^2}}}{b + \frac{2ab}{1+a^2}} - \sqrt{b} - \frac{2ab}{1+a^2} = a$$

Exercice 27

a et b sont deux nombres réels tels que $a^2 > b$.

1) Montrer que :

$$\begin{aligned}\sqrt{a + \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \\ \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\end{aligned}$$

2) En déduire l'écriture simplifiée de chacun des nombres suivants :

$$\begin{aligned}\sqrt{5 + \sqrt{24}} \quad ; \quad \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \quad ; \quad \sqrt{19 + 6\sqrt{2}} \\ \sqrt{79 - 24\sqrt{7}} \quad ; \quad \sqrt{43 + 30\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Exercice 28

a, b, c, x, y , et z sont des nombres réels strictement positifs tels que :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Démontrer que : $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = \sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$.

04

Je me prépare à l'examen local

Exercice 43 — Exercice résolu

1) Calculer :

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{35} \times \sqrt{\frac{5}{7}} \quad ; \quad b = 2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \frac{1}{6}\sqrt{108} \\ c &= (\sqrt{6})^7 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{-5} \quad ; \quad d = (\sqrt{2} + 2)^2 - \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

2) Montrer que e est un nombre entier relatif où :

$$e = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

3) On considère l'expression F : $F = x(x + \sqrt{7}) + x^2 - 7$.

a) Factoriser F .

b) Déterminer les valeurs de x telles que : $F = 0$.

Correction : 43**1) Calcul de a :**

$$a = \sqrt{35} \times \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$a = \sqrt{35 \times \frac{5}{7}} = \sqrt{5 \times 5} = 5$$

Donc : $a = 5$.**Calcul de b :**

$$b = 2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \frac{1}{6}\sqrt{108}$$

$$b = 2\sqrt{4^2 \times 3} - 5\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{6^2 \times 3}$$

$$b = 2 \times 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \frac{1}{6} \times 6\sqrt{3}$$

$$b = (8 - 5 - 1)\sqrt{3}$$

Donc : $b = 2\sqrt{3}$.**Calcul de c :**

$$c = (\sqrt{6})^7 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{-5}$$

$$c = (\sqrt{6})^7 \times \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^5$$

$$c = \sqrt{6} \times \frac{2^5}{\sqrt{6}}$$

$$c = 2^5$$

Donc : $c = 32$.**Calcul de d :**

$$d = (\sqrt{2} + 2)^2 - \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1)$$

$$d = (\sqrt{2})^2 + 2^2 + 2(2 \times \sqrt{2}) - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1$$

$$d = 2 + 4 + 4\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2}$$

Donc : $d = 2 + 5\sqrt{2}$.**2) Montrons que e est un entier relatif.**

On a :

$$e = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

$$e = \frac{1(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} - \frac{1(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}$$

$$e = \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} - \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4}$$

$$e = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} - 2$$

ou : $e = -4$ est un entier relatif, donc : e est un nombre entier relatif.

3) a. Factorisation de F :

$$F = x(x + \sqrt{7}) + x^2 - 7$$

$$F = x(x + \sqrt{7}) + (x^2 - (\sqrt{7})^2)$$

$$F = x(x + \sqrt{7}) + (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

$$F = (x + \sqrt{7})(x + x - \sqrt{7})$$

Donc : $F = (x + \sqrt{7})(2x - \sqrt{7})$.

b. Valeurs de x pour que : $F = 0$.

On a : $F = 0$ et $F = (x + \sqrt{7})(2x - \sqrt{7})$.

Donc : $(x + \sqrt{7})(2x - \sqrt{7}) = 0$

$$x + \sqrt{7} = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - \sqrt{7} = 0$$

$$x = -\sqrt{7} \quad \text{et} \quad x = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Les valeurs de x sont : $-\sqrt{7}$ et $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 44

Simplifier :

$$a = \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{21} \quad ; \quad b = \sqrt{\frac{16}{5}} \times \sqrt{\frac{5}{25}}$$

$$c = 3\sqrt{32} - \sqrt{98} - 4\sqrt{18} \quad ; \quad d = (2 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$$

$$e = \frac{5}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \quad ; \quad f = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$