

3 APIC ■ Semestre 1 ■ Activités géométriques

05

Théorème de Pythagore

Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque pour calculer des longueurs et démontrer qu'un triangle est rectangle.

Feuille d'exercices

60 min

Nom : _____

Date : _____

01

Investissement — Je m'entraîne

Pour réviser son cours

Exercice 1

Recopier et compléter les phrases suivantes :

EFG est un triangle rectangle en E .

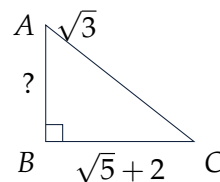
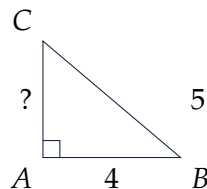
Donc : $FG^2 = \dots^2 + \dots^2$

$EF^2 = \dots^2 - \dots^2$

$EG^2 = \dots^2 - \dots^2$

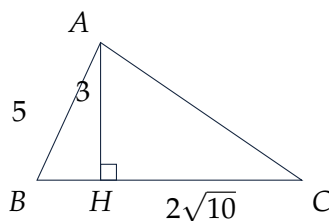
Exercice 2

Calculer AB dans chacun des cas suivants :



Exercice 3

Calculer AC et BH .



Exercice 4

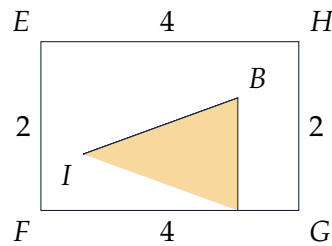
EFG est un triangle tel que : $EF = \frac{1}{6}$; $EG = \frac{1}{8}$ et $FG = \frac{1}{10}$.

EFG est-il un triangle rectangle? Justifier.

Pythagore pour calculer les longueurs

Exercice 5

Calculer le périmètre du triangle IBF .



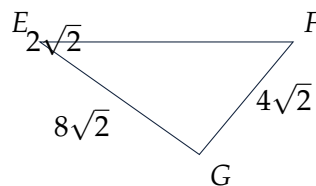
Exercice 6

EFG est un triangle et H est le projeté orthogonal de E sur (FG) tel que : $EF = 15$, $FH = 9$ et $FG = 25$.

Calculer EG .

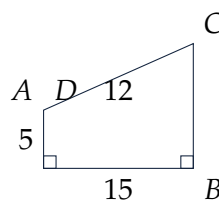
Exercice 7

Calculer la hauteur relative au côté $[EF]$ du triangle EFG .



Exercice 8

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et B tels que : $AB = 5$, $AD = 12$ et $BC = 15$.



Calculer AC et DB .

Exercice 9

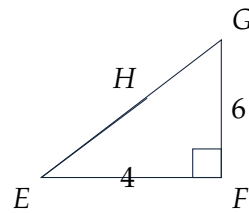
ABC est un triangle et $[AH]$ sa hauteur tels que

$$\frac{AH}{BH} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{CH}{AH} = \frac{1}{3}.$$

Calculer AB , AC et BC sachant que l'aire de ABC est 15 cm^2 .

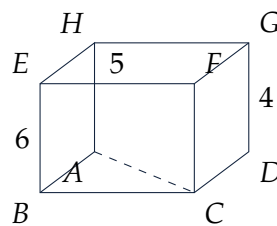
Exercice 10

EFG est un triangle rectangle en E et $[EH]$ est sa hauteur.
Calculer EF .



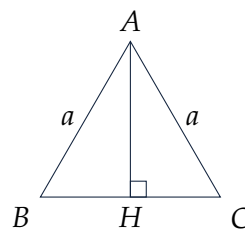
Exercice 11

$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que : $AE = 6$; $AD = 5$; $EF = 4$.
Calculer EC .



Exercice 12

ABC est un triangle équilatéral de côté a .
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .
On pose : $AH = h$.
Démontrer que : $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

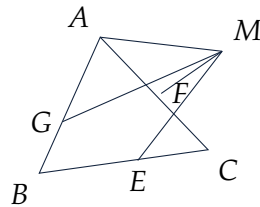


Exercice 13

EFG est un triangle rectangle en G tel que : $FG = \sqrt{7}$ cm et $EG = 3\sqrt{2}$ cm. Soit M le milieu de $[EF]$.
Calculer MG .

Exercice 14

ABC est un triangle.
Soit M un point à l'extérieur du triangle ABC .
 E , F et G sont respectivement les projetés orthogonaux de M sur (BC) , (AC) et (AB) .
Démontrer que : $AG^2 + BE^2 + CF^2 = AF^2 + CE^2 + BG^2$.



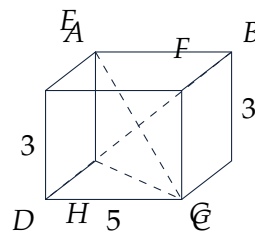
Exercice 15

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$ rectangle en D tels que : $AB = 3$ cm , $AD = 5$ cm et $BC = 7$ cm.

Calculer le périmètre et l'aire du trapèze $ABCD$.

Exercice 16

On considère la figure suivante.
Calculer DE , DF , DH et DG .



Exercice 17

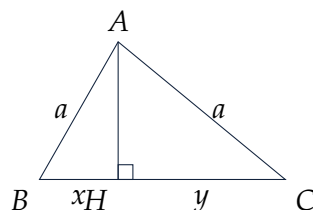
ABC est un triangle isocèle en A et $[AH]$ sa hauteur tels que : $BC = 4$ et $AH = 3\sqrt{5}$.
Calculer AB et AC .

Exercice 18

ABC est un triangle et I est le milieu de $[AC]$ tel que $AC = 10$. La parallèle à (AB) coupe la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ en D . Calculer AD sachant que $CD = 6$.

Exercice 19

ABC est un triangle.
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .
Montrer que : $a^2 = x^2 + b^2 - y^2$.

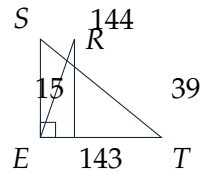


Mon bilan

Exercice 1

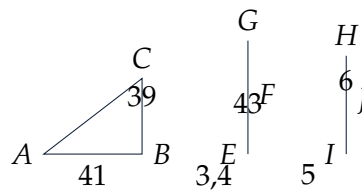
Indiquer la bonne réponse par A , B ou C .

Pour les exercices 1 à 3, on utilise la figure ci-contre :



	A	B	C
1) La longueur AS est égale à : ...	143	144	145
2) La longueur ES est égale à : ...	17	18	19
3) Les droites (AE) et (SE) sont : ...	sont parallèles	sont perpendiculaires	ne sont pas perpendiculaires

Pour les exercices 4 à 6, on utilise la figure ci-contre : (l'unité de longueur étant le centimètre)



	A	B	C
4) La longueur BC est égale : ...	40	$\sqrt{160}$	12
5) La longueur GF est égale : ...	1,6	1,7	2
6) Valeur approchée de IJ est : ...	6	6,24	7

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

Savoir	Pratique
Ex. 1	Théorème
Ex. 2	Théorème
Ex. 3	Théorème
Ex. 4	Théorème
Ex. 5	Théorème
Ex. 6	Théorème

3) Exercices pour la remédiation voir R5 page : 248

02

Approfondissement — Je recherche

Réciproque de Pythagore et l'orthogonalité

Exercice 20

EFG est un triangle tel que :

$$GF = 3x + 5 \quad ; \quad EF = 3x + 2 \quad ; \quad EG = 5.$$

Déterminer la valeur de x pour que EFG soit un triangle rectangle en E .

Exercice 21

ABC est un triangle tel que : $AB = 5$ cm ; $AC = \sqrt{7}$ cm et $BC = 3\sqrt{2}$ cm.

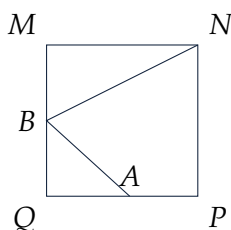
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 22

$MNPQ$ est un carré tel que : $MQ = 12$ cm.

Soit B le milieu de $[MQ]$ et A un point de $[PQ]$ tel que : $PA = 9$ cm.

BAN est-il un triangle rectangle? Justifier.



Exercice 23

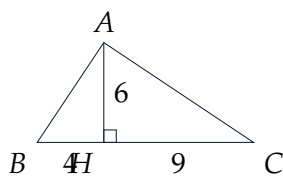
ABC est un triangle tel que :

$$AB = \frac{5}{13}AC \quad \text{et} \quad BC = \frac{12}{13}AC.$$

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 24

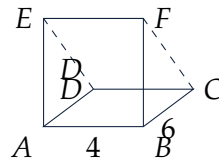
ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tels que : $BH = 4$, $CH = 9$ et $AH = 6$.
Montrer que ABC est un triangle rectangle en A .



Exercice 25

$ABCDEF$ est un prisme tel que $AD = 10$, $AB = 4$ et $BC = 6$.

ABF est-il un triangle rectangle? Justifier.



Exercice 26

ABC est un triangle tel que :

$$AB = m^2 + n^2 \quad ; \quad AC = m^2 - n^2 \quad ; \quad BC = 2mn$$

où : $m > n > 0$.

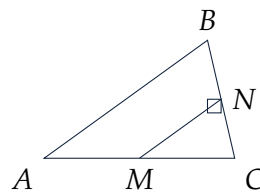
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 27

ABC est un triangle.

Soit M le milieu de $[AC]$ et N le projeté orthogonal de M sur (BC) tels que : $AB^2 = BN^2 - CN^2$.

Montrer que ABC est un triangle rectangle.



Exercice 28

ABC est un triangle tel que : $AB \neq AC$ et $AB^4 - AC^4 = BC^2 (AB^2 - AC^2)$.

Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Problèmes ouverts

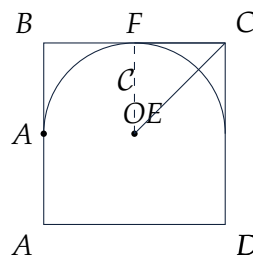
Exercice 29

$ABCD$ est un carré de côté a .

Soit (C) le demi-cercle de centre O et de diamètre $[AD]$.

La parallèle à (AB) passant par O coupe (C) en E et $[BC]$ en F (voir la figure).

Démontrer que : $CE = a \frac{\sqrt{10}}{2}$.



Exercice 30

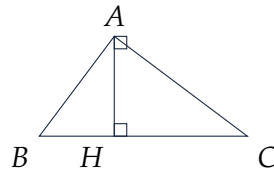
ABC est un triangle rectangle en A .

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Montrer que :

$$1) BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$$

$$2) AH^2 = BH \times CH \quad 3) AB^2 = BH \times CB$$

$$\text{et } AC^2 = CH \times BC \quad 4) AB \times AC = AH \times BC$$



Exercice 31

EFG est un triangle rectangle en E .

Soit H le projeté orthogonal de E sur (FG) .

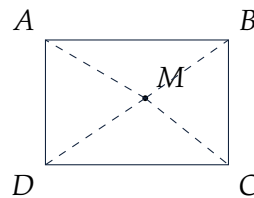
Démontrer que : $\frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EG^2} = \frac{1}{EH^2}$.

Exercice 32

$ABCD$ est un rectangle.

Soit M un point à l'intérieur du rectangle $ABCD$.

Montrer que : $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.



03

Challenges

Exercice 33

$ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AD]$ et $[BC]$ tel que $AD < BC$.

Montrer que : $AC^2 - AB^2 = AD \times BC$.

Exercice 34

ABC est un triangle isocèle en B .

Soit D le symétrique de C par rapport à A .

Montrer que : $BD^2 = 2AB^2 + AC^2$.

Exercice 35

EFG est un triangle rectangle en E tel que : $\widehat{EGF} = 60^\circ$.

Soit H le symétrique de E par rapport à G .

Montrer que : $FH^2 = 7EG^2$.

Exercice 36

Avec TICE

ABC est un triangle rectangle en A .

Soient M , N et P les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.

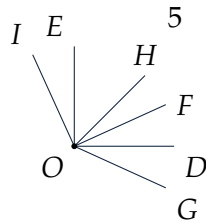
- 1) Démontrer que : $5AM^2 = BP^2 + CN^2$.
- 2) Utiliser un tableur pour tester l'égalité demandée.

Thalès pour placer des points

Exercice 37

Calculer OF , OG , OH et OI .

En déduire une construction d'un segment de longueur 28.



Exercice 38

Construire un segment de longueur $\sqrt{34}$.

04

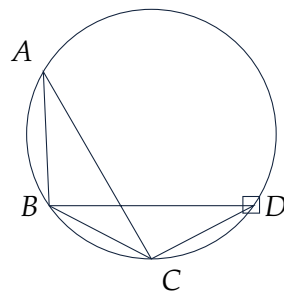
Situations proposées aux olympiades

Exercice 39

On considère la figure suivante où :

$$AB = BD \quad \text{et} \quad AC = 20 \quad \text{et} \quad DC = 4.$$

Déterminer le rayon du cercle.



05

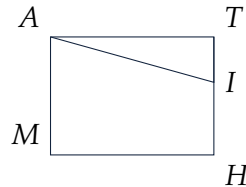
Je me prépare à l'examen local

Exercice 42 — Exercice résolu

$MATH$ est rectangle.

On donne : $AT = \sqrt{3}$, $TI = 1$ et $HI = 3$.

- 1) Calculer AI et MI .
- 2) Montrer que AMI est un triangle rectangle.



Correction : 42

1) Calcul de AI :

AIT est un triangle rectangle en T .

D'après le théorème de Pythagore, on obtient :

$$AI^2 = AT^2 + IT^2$$

$$AI^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

D'où : $AI^2 = 4$.

Donc : $AI = 2$ car $AI > 0$.

Calcul de MI :

HIM est un triangle rectangle en H .

Donc d'après le théorème de Pythagore, on obtient :

$$MI^2 = MH^2 + HI^2$$

$$MI^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 3 + 9 = 12$$

$$MI^2 = 12 \quad MI = \sqrt{12}$$

Donc : $MI = 2\sqrt{3}$.

2) Montrons que AMI est un triangle rectangle.

$MATH$ est un rectangle.

$$MA = HT$$

$$MA = HI + IT \quad (\text{car } I \in [HT])$$

$$MA = 3 + 1$$

$$MA = 4$$

Ainsi : $MA > MI$ et $MA > AI$.

Comparons MA^2 et $MI^2 + AI^2$.

On a : $MA^2 = 4^2 = 16$.

et $MI^2 + AI^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$.

D'où : $MA^2 = MI^2 + AI^2$.

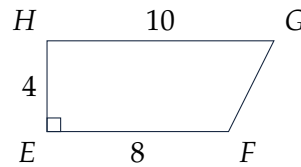
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, AMI est un triangle rectangle en I .

Exercice 43

Sur la figure ci-contre, $EFGH$ est un trapèze rectangle en E et H tels que :

$$EF = 8, \quad EH = 4 \quad \text{et} \quad HG = 10$$

- 1) Montrer que : $FH = 4\sqrt{5}$ et $FG = 2\sqrt{5}$.
- 2) En déduire que $EFGH$ est un triangle rectangle en F .



Exercice 44

ABC est un triangle tel que : $AB = 3$, $AC = 6$ et $BC = 3\sqrt{5}$.

- 1) Montrer que ABC est un triangle rectangle en A .
- 2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .
Calculer AH et CH .

Exercice 45

$ABCD$ est un trapèze rectangle en B et C tel que : $AB = 4$, $BC = 2$ et $CD = 5$.

- 1) Montrer que : $AC = 2\sqrt{5}$.
- 2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (DC) .
 - a) Calculer AD .
 - b) Montrer que ADC est un triangle rectangle en A .

Exercice 46

$[BC]$ est un segment de longueur 8 cm.

Soit H un point de $[BC]$ tel que : $BH = 2$ cm.

Soit A un point de la perpendiculaire à (BC) passant par H tel que $AB = 4$ cm.

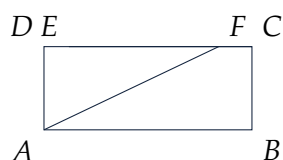
- 1) a) Calculer AH .
b) Montrer que : $AC = 4\sqrt{3}$ cm.
- 2) a) Démontrer que le point H appartient au segment $[BC]$.
b) Construire les points A , B , C et H .
c) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
d) Calculer la longueur AB .
- 3) a) Calculer l'aire du triangle ABC .
b) Le segment $[BK]$ est la hauteur relative au côté $[AC]$.
Calculer la longueur BK .
c) Calculer les longueurs AK et CK .

Exercice 47

On considère la figure suivante :

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 10$ et $AD = 4$.

Calculer EF .

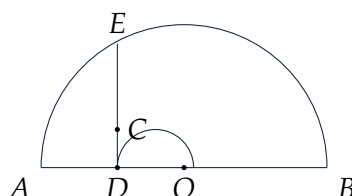


Exercice 48

ABC est un triangle rectangle en A .
La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H .
Démontrer : $AH^3 = BC^2 - AC^2 - BH^2$.

Exercice 49

Une défense d'éléphant est représentée ci dessous par deux demi-cercles tangents en A .
 $[AB]$ est le diamètre du grand demi-cercle de centre O .
On donne : $OA = 9$ dm et $DO = 3$ dm.
Déterminer AC .



Exercice 50

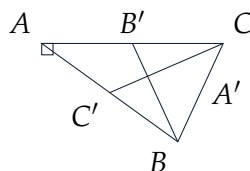
A , B , C et H sont des points tels que :

$$BC = 14 \text{ cm} ; BH = 5 \text{ cm} ; CH = 9 \text{ cm} ; AH = 12 \text{ cm} \text{ et } AC = 15 \text{ cm}.$$

Exercice 51

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 5,4$ cm et $AC = 7,2$ cm.
 A' , B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

- 1) Calculer les longueurs des médianes CC' et BB' .
- 2) Démontrer que le triangle $A'B'C'$ est rectangle.



Exercice 52

On considère la figure suivante :

- 1) Calculer DJ
- 2) Calculer l'aire du rectangle $ABCD$.

