

3 APIC ■ Semestre 2 ■ Activités géométriques

09

Triangles isométriques

Reconnaître deux triangles isométriques et utiliser les trois cas d'isométrie pour démontrer que deux triangles sont superposables.

Feuille d'exercices

60 min

Nom : _____

Date : _____

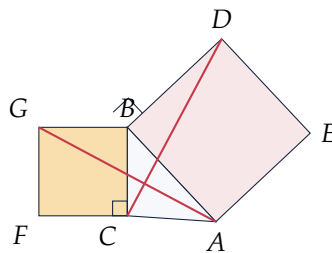
01

Pratique — J'applique

Utiliser les triangles isométriques pour démontrer

Exemple 1 — Deux carrés construits à l'extérieur d'un triangle

ABDE et BCFG sont deux carrés construits à l'extérieur d'un triangle ABC.
Démontrer que : $GA = CD$.



Pour démontrer que des segments ont la même longueur, on peut démontrer que ce sont des côtés homologues de deux triangles isométriques.

Montrons donc que les triangles GAB et DCB sont isométriques.

BCFG est un carré.

Donc : $BG = BC$ ①

Et ABDE est un carré.

Donc : $AB = BD$ ②

Comparons les angles $\widehat{ABG}$ et $\widehat{DBC}$.

On a : $\widehat{ABG} = \widehat{ABC} + \widehat{CBG} = \widehat{ABC} + 90^\circ$

$\widehat{DBC} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{ABC} + 90^\circ$

Donc : $\widehat{ABG} = \widehat{DBC}$ ③

De ①, ② et ③ et d'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles GAB et CDB sont isométriques.

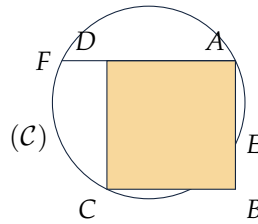
Il en résulte que leurs côtés homologues ont même longueur.

D'où : $GA = CD$.

Exemple 2 — Le carré inscrit dans un cercle

Sur la figure ci-contre :

- A et C sont deux points d'un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O,
- ABCD est un carré.
- (AD) recoupe ($\mathcal{C}$) en F.
- (AB) recoupe ($\mathcal{C}$) en E.



1) Montrer que : $CE = CF$.

2) Montrer que : $DF = EB$.

1) Montrons que : $CE = CF$.

C'est-à-dire, on va démontrer que le triangle CEF est isocèle en C.

L'angle au centre $\widehat{FOE}$ est associé à l'angle au centre $\widehat{FAE}$.

Donc : $\widehat{FOE} = 2\widehat{FAE}$

$\widehat{FOE} = 2 \times 90^\circ$ (car $\widehat{FAE} = \widehat{DAB} = 90^\circ$)

$\widehat{FOE} = 180^\circ$

Donc : $[EF]$ est un diamètre de (C) .

D'autre part $\widehat{COF} = 2\widehat{CAF}$ (angle au centre)

Or : $\widehat{CAF} = \widehat{CAD} = 45^\circ$ (car DAC est rectangle isocèle),

alors : $\widehat{COF} = 90^\circ$. Comme $OC = OF$, alors $\widehat{CFO} = 45^\circ$.

En outre C appartient au cercle (C) de diamètre $[EF]$.

Donc : CEF est un triangle rectangle isocèle en C. Par suite : $CE = CF$.

2) Montrons que : $DF = EB$.

On va démontrer que ce sont des côtés homologues de deux triangles isométriques.

Montrons donc que les triangles BEC et CDF sont isométriques

On a : $CE = CF$ ① (d'après la question précédente)

et : $CB = CD$ ② (ABCD est un carré).

On sait que : $\widehat{BEC} = \widehat{BCD} - \widehat{DCE} = 90^\circ - \widehat{DCE}$

et : $\widehat{FCD} = \widehat{FCE} - \widehat{DCE} = 90^\circ - \widehat{DCE}$

Donc : $\widehat{BEC} = \widehat{FCD}$ ③

De ①, ② et ③ et d'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles BEC et CDF sont isométriques.

Donc : $EB = DF$

Remarque

On peut montrer que $DF = EB$ en utilisant le théorème de Pythagore; ce n'est pas notre objectif.

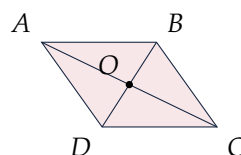
02

Investissement — Je m'entraîne

Pour réviser son cours

Exercice 1

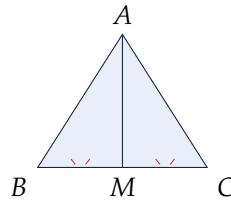
ABCD est un parallélogramme de centre O.



Montrer que les triangles DOC et BOA sont isométriques (de plusieurs façons).

Exercice 2

ABC est un triangle isocèle en A et M le milieu de [BC].



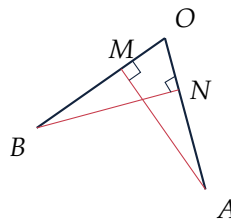
Montrer que les triangles BAM et CAM sont isométriques (de plusieurs façons).

Exercice 3

BOA est un angle aigu et $OA = OB$.

M est le projeté orthogonal de A sur (OB).

N est le projeté orthogonal de B sur (OA).



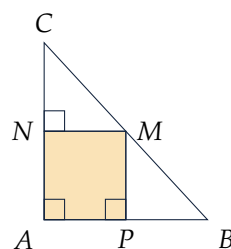
Montrer que les triangles BON et MAO sont isométriques.

Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en A.

Soit M le milieu de [BC].

N et P sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AC) et (AB) .

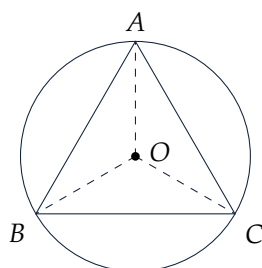


Montrer que MBP et MNC sont des triangles isométriques.

Triangles isométriques pour démontrer

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit de centre O.



Montrer que les triangles OAB, OAC et OBC sont isométriques.

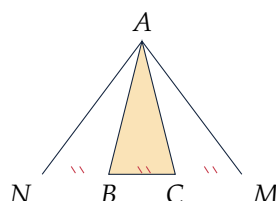
Exercice 6

ABC est un triangle isocèle en A.

M et N sont deux points de (BC).

tels que : $NB = BC = CM$ et

B est un point de [NC] et C est un point de [BM].



Montrer que ABN et ACM sont des triangles isométriques.

Exercice 7

ABC est un triangle isocèle en A.

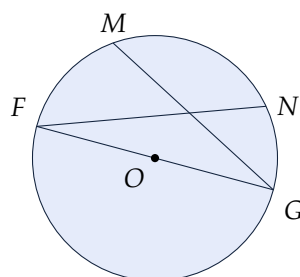
Soit M le projeté orthogonal de B sur (AC) et N le projeté orthogonal de C sur (AB).

Montrer que les triangles MAB et NAC sont isométriques.

Exercice 8

[FG] est un diamètre d'un cercle (C) de centre O.

Soient M et N deux points du cercle (C) tels que : $FN = GM$.



Montrer que les triangles FGN et FGM sont isométriques.

Exercice 9

RAT est un triangle isocèle en R .

Soit M et I les milieux respectifs de [RA] et [RT].

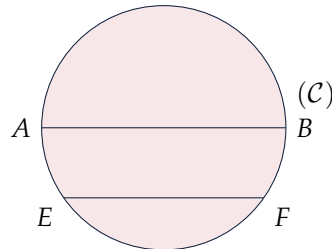
- 1) Montrer que les triangles RIA et MTR sont isométriques.
- 2) Montrer que les triangles TAI et TAM sont isométriques.

Exercice 10

$(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Soit E un point de $(\mathcal{C})$ ($E \neq A$ et $E \neq B$)

La parallèle à la droite (AB) passant par E recoupe $(\mathcal{C})$ en F .



Démontrer que les triangles AEB et AFB sont isométriques.

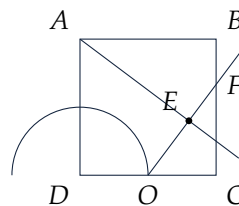
Exercice 11

ABCD est un carré.

La droite (AE) est la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[DC]$ en E .

La droite (OE) coupe $[BC]$ en F .

O est le centre du cercle $(\mathcal{C})$.



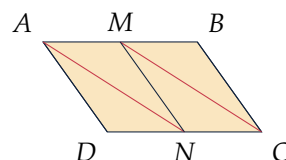
- 1) Montrer que les triangles DOA et OAE sont isométriques.
- 2) Montrer que les triangles AEF et BAF sont isométriques.

Démonstration

Exercice 12

ABCD est un parallélogramme.

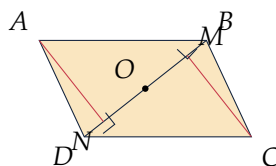
Soit M et N les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.



- 1) Montrer que DAN et BCM sont des triangles isométriques.
- 2) En déduire que : $AN = CM$.

Exercice 13

ABCD est un parallélogramme de centre O.
N est le projeté orthogonal de A sur (DB).
M est le projeté orthogonal de C sur (DB).



- 1) Montrer que les triangles ONA et OMC sont isométriques.
- 2) En déduire que O est le milieu de [MN] .

Mon bilan

Exercice 1

1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

	A	B	C
① À quelle figure les triangles ABC et EFG sont isométriques ...			
① À quelle figure les triangles ABC et EFG sont isométriques ...			
② ABCD est un parallélogramme de centre O. Les triangles ADO et BCO sont-ils isométriques ?	non	oui	je ne sait pas
④ Si ABC et EFG sont deux triangles tels que : $AB = EG$ et $BC = EF$ et $\hat{B} = \hat{E} = 30^\circ$ et $\hat{C} = 40^\circ$ alors :	$\hat{F} = 30^\circ$	$\hat{F} = 40^\circ$	$\hat{F} = 90^\circ$
⑤ ABC et EFG sont deux triangles tels que : $AB = EG$ et $BC = EF$ et $\hat{B} = \hat{E}$ et $AC = 6$ cm , alors : $BC = 7$ cm.	$EF = 4$ cm	$EF = 7$ cm	$EF = 5$ cm

Corrections page : 247

2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

	Savoir	Pratique
Ex : 1	Définition	
Ex : 2	Propriété 3 et 2	
Ex : 3	Définition	
Ex : 4	Propriété 3 et propriété 1	
Ex : 5	Propriété 3 et propriété 1	

3) Exercices pour la remédiation voir R9 page : 248

03

Approfondissement — Je recherche

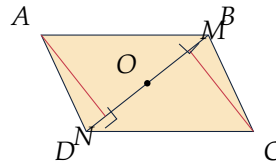
Triangles isométriques et démonstration

Exercice 14

AVEC TICE

ABCD est un parallélogramme.

M et N sont les projetés respectifs de C et A sur (DB).



- 1) Exploiter le dynamisme de logiciel Geogebra pour conjecturer une comparaison entre les distances DN et BM.
- 2) Montrer que : $DN = BM$.

Exercice 15

ABCD est un parallélogramme de centre O.

Une droite (Δ) passant par O coupe [BC] et [AD] respectivement en E et F.

- 1) Montrer que OCE et FOA sont des triangles isométriques.
- 2) En déduire que : $AF = CE$.

Exercice 16

ABC est un triangle tel que $AC < AB$.

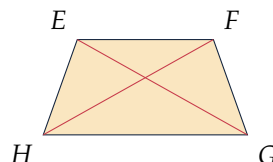
La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe [BC] en M.

Le cercle de centre A et de rayon AC coupe [AB] en N.

- 1) Montrer que les triangles CAM et MAN sont isométriques.
- 2) En déduire la nature du triangle MCN.

Exercice 17

EFGH est un trapèze isocèle tel que : $(EF) \parallel (HG)$.



- 1) Montrer que les triangles EGH et FHG sont isométriques.
- 2) En déduire que : $EG = FH$.
- 3) Conclure.

Exercice 18

ABC est un triangle rectangle en A.

La médiatrice du segment [AC] coupe [AC] en M et [BC] en N.

Montrer que les triangles MAN et MCN sont isométriques.

Exercice 19

$[AB]$ est un diamètre d'un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm.

Soit F un point de (C) tel que : $\widehat{FAB} = 45^\circ$.

La tangente au cercle (C) en B coupe la droite (AF) en D .

Soit G le symétrique de D par rapport à B .

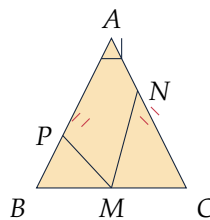
Montrer que les triangles GAB et DBA sont isométriques.

Exercice 20

ABC est un triangle rectangle isocèle en A .

M est le milieu de $[BC]$.

N est un point de $[AC]$ et P un point de $[AB]$ tel que : $AP = CN$.



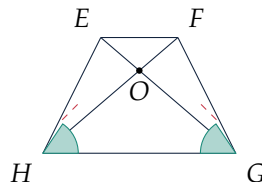
1) Montrer que les triangles MAP et MCN sont isométriques.

2) En déduire que MNP est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 21

Sur la figure ci-contre :

$EH = FG$ et $\widehat{EHG} = \widehat{FGH}$.



1) Montrer que les triangles EGH et FGH sont isométriques.

2) Montrer que les triangles OEF et OGH sont isocèles en O .

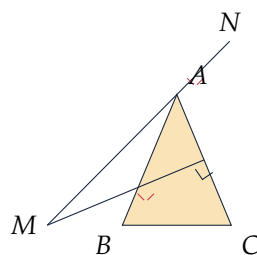
3) Montrer que $(EF) \parallel (HG)$.

Exercice 22

ABC est un triangle isocèle en A .

La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en M .

Soit N le point de la droite (AM) tels que : $AN = BM$ et A un point du segment $[MN]$.



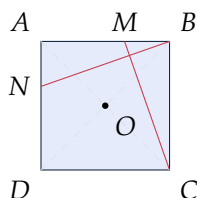
- 1) Montrer que les triangles CAN et BAM sont isométriques.
- 2) En déduire la nature du triangle MCN.

Exercice 23

ABCD est un carré de centre O.

Soit M un point de [AB].

La perpendiculaire à la droite (MC) passant par B coupe (AD) en N.



- 1) a. Montrer que les triangles BCM et NAB sont isométriques.
b. En déduire que $BM = AN$.
- 2) a. Montrer que les triangles BOM et ONA sont isométriques.
b. En déduire la nature du triangle NOM.

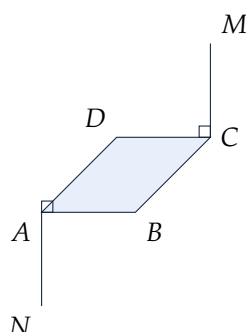
Démonstration

Exercice 24

ABCD est un parallélogramme.

La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AD) en M.

La perpendiculaire à (DC) passant par A coupe (BC) en N.

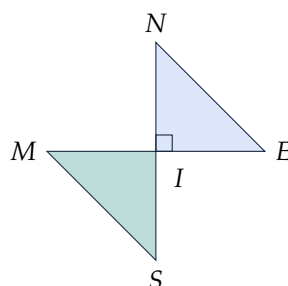


Montrer que les triangles AMB et CND sont isométriques.

Exercice 25

Sur la figure ci-contre :

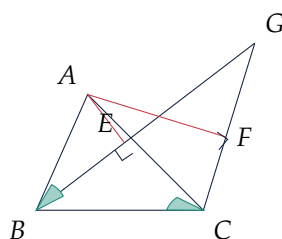
NIE et MIS sont deux triangles isocèles rectangles en I.



Démontrer que : $NS = ME$.

Exercice 26

ABC est un triangle. Soit G un point à l'extérieur du triangle ABC tel que : $\widehat{GBA} = \widehat{ACG}$ (voir figure)
Soit E et F les projetés orthogonaux de A respectivement sur les droites (BG) et (CG).



Démontrer que AEF est un triangle isocèle en A.

Challenges

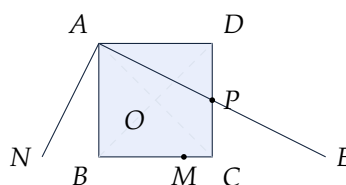
Exercice 27

ABCD est un carré de centre O.

Soit P un point de [DC]

La droite (AP) coupe (BC) en E.

La perpendiculaire à (AE) passant par A coupe (BC) en N.



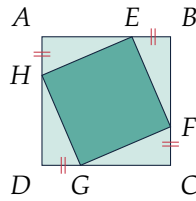
Soit M le milieu de [NP].

1) Montrer que les triangles DAP et BAN sont isométriques.

2) Montrer que les triangles DAM et DCM sont isométriques.

Exercice 28

ABCD est un carré. E, F, G et H sont respectivement des points de [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que : $BE = AH = DG = CF$.



En utilisant des triangles isométriques, montrer que le quadrilatère EFGH est un carré.

04

Situations proposées aux olympiades

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A.

La bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en E.

La bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$ coupe [CA] en F. La perpendiculaire à (BF) passant par C, coupe (BF) en M.

La perpendiculaire à (AE) passant par C, coupe (AE) en N.

Montrer que : $(MN) \parallel (AB)$.

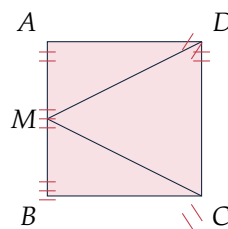
05

Je me prépare à l'examen local

Exercice 29 — Exercice résolu

ABCD est un rectangle.

Soit M le milieu de [AB].



1) Montrer que les triangles MAD et MBC sont isométriques.

2) En déduire que : $\widehat{MDA} = \widehat{BCM}$.

Correction : 29

1) Montrons que les triangles MAD et MBC sont isométriques.

On cherche d'abord les côtés de même longueur de ces deux triangles.

ABCD est un rectangle.

Donc : $AD = BC$ ① (côtés opposés)

Et M est le milieu de [AB]

Donc : $MA = MB$ ②

Et : $\widehat{DAM} = \widehat{MBC}$ ③ (angles droits)

De ① , ② et ③ et d'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles MAD et MBC sont isométriques .

2) *Déduisons-en que* : $\widehat{MAD} = \widehat{BCM}$.

On sait que les triangles MAD et MBC sont isométriques.

D'où les angles homologues ont même mesure.

Donc : $\widehat{MDA} = \widehat{BCM}$.

Exercice 30

ABCD est un carré.

Soit M le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur (DC).

Montrer que les triangles MDH et BCM sont isométriques.

Exercice 30 bis

ABC est un triangle rectangle isocèle en A et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de [AC].

La droite (BM) recoupe $(\mathcal{C})$ en N.

Les droites (CN) et (BA) se coupent en P.

1) Montrer que les triangles BAM et PAC sont isométriques.

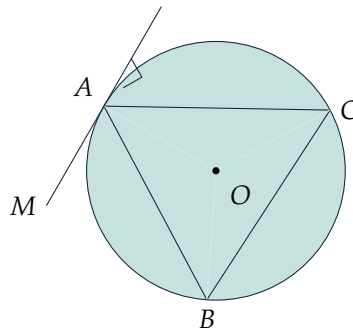
2) En déduire la nature du triangle PAM.

Exercice 31

Sur la figure ci-contre :

$\widehat{ACB} = 58^\circ$ et ABC est un triangle isocèle en C.

(AM) est la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.



1) Calculer $\widehat{BOA}$ et $\widehat{CAO}$.

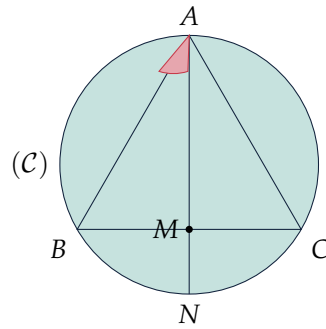
2) a. Montrer que les triangles COA et BOC sont isométriques

b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CBO}$.

Exercice 32

ABC est un triangle isocèle en A et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit.

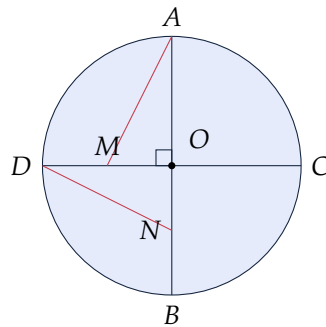
La bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ coupe [CB] en M et recoupe $(\mathcal{C})$ en N.



Montrer que les triangles CAN et BAN sont isométriques.

Exercice 33

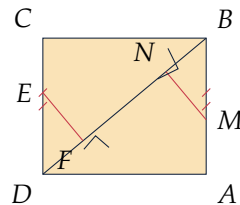
Sur la figure suivante : A, B, C et D sont des points d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O tels que : $[AB]$ et $[DC]$ soient deux diamètres de $(\mathcal{C})$ et $(AB) \perp (DC)$.
M et N sont les milieux respectifs de $[OD]$ et $[OB]$.



- 1) Montrer que les triangles MAO et DON sont isométriques .
- 2) En déduire que : $\widehat{OMA} = \widehat{DNO}$ et $(AM) \perp (DN)$.

Exercice 34

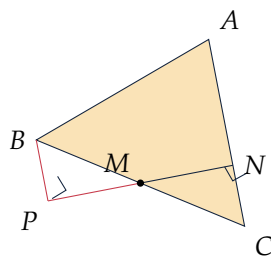
ABCD est un rectangle. M et E sont respectivement des points de $[AB]$ et $[DC]$ tels que $MA = CE$.
Soit N le projeté orthogonal de M sur (DB) et F le projeté orthogonal de E sur (DB) .



- 1) Montrer que les triangles BMN et DEF sont isométriques.
- 2) En déduire que : $\widehat{BMN} = \widehat{DEF}$.

Exercice 35

ABC est un triangle quelconque.
Soit M le milieu de $[BC]$. N est le projeté orthogonal de M sur (AC) .
P est le projeté orthogonal de B sur (MN) .



- 1) Montrer que les triangles BMP et CMN sont isométriques
- 2) En déduire que : $NP = 2MN$.

Exercice 36

ABC est un triangle rectangle isocèle en A

tel que : $AB = 7$ cm.

Soit M le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de B sur (MC).

La droite (BH) coupe (AC) en N.

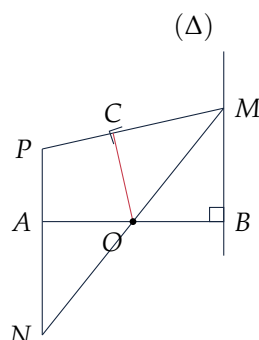
- 1) Montrer que les triangles CAM et BAN sont isométriques.
- 2) Calculer NA et NB.

Exercice 37

[AB] est un segment de milieu de O.

Soit M un point de la perpendiculaire à (AB) en B.

N est le symétrique de M par rapport à O.



- 1) a. Montrer que les triangles BOM et ONA sont isométriques.
 - b. En déduire que : $\widehat{OAN} = 90^\circ$
 - 2) La médiatrice de [MN] coupe (AN) en P.
- Soit C le projeté orthogonal de O sur (MP).
Montrer que : $OC = ON$.