

10

Triangles semblables

Reconnaître deux triangles semblables, utiliser les trois cas de similitude et le rapport de similitude pour calculer des longueurs et comparer des aires.

Feuille d'exercices

60 min

Nom : _____

Date : _____

01

Pratique — J'applique

1. Utiliser des triangles semblables pour comparer des aires

Exemple 1 — Utiliser des triangles semblables pour comparer des aires

ABC est un triangle.

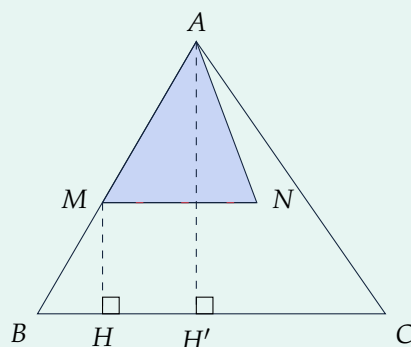
Soit M un point de $[AB]$.

La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N .

Calculer le rapport entre l'aire du triangle AMN et celle du triangle ABC .

Correction : Exemple 1

Calculons $\frac{\text{Aire } AMN}{\text{Aire } ABC}$.



Considérons la sécante (AB) aux parallèles (MN) et (BC) .

On a : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ ① (angles correspondants)

En outre : $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$ ② (angles confondus)

De ① et ② et d'après le 1^{er} cas de similitude, les triangles AMN et ABC sont semblables.

Il en résulte que les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Soit k le rapport de similitude de AMN et ABC .

$$\text{On a : } \frac{MN}{BC} = k, \text{ soit } MN = k BC.$$

La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe (MN) en H et (BC) en H' .

Donc $[AH]$ et $[AH']$ sont des hauteurs des triangles AMN et ABC , (car $(MN) \parallel (BC)$).

$$\text{Alors : } \frac{AH}{AH'} = k \quad (\text{en utilisant le théorème de Thalès})$$

Ainsi : $AH = k AH'$

Par suite :

$$\frac{\text{Aire } AMN}{\text{Aire } ABC} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times MN}{\frac{1}{2} \times AH' \times BC} = \frac{k AH' \times k BC}{AH' \times BC} = k^2$$

Donc : $\frac{\text{Aire } AMN}{\text{Aire } ABC} = k^2$ où $k = \frac{MN}{BC}$ ou encore $\frac{\text{Aire } AMN}{\text{Aire } ABC} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2$

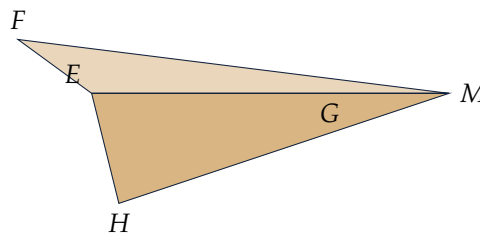
2. Utiliser des triangles semblables pour comparer des angles

Exemple 2 — Utiliser des triangles semblables pour comparer des angles

Sur la figure ci-contre :

- $EF = 8$; $FG = 10$ et $EG = EH = 12$.
- $EM = 18$ et $HM = 15$.
- E, G et M sont des points alignés.

Montrer que $[EM)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$.



Correction : Exemple 2

Montrons que $[EM)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$.

On constate que l'énoncé de l'exercice ne contient que les longueurs des côtés des deux triangles EFG et EHM , donc, on peut penser à utiliser le troisième cas de similitude.

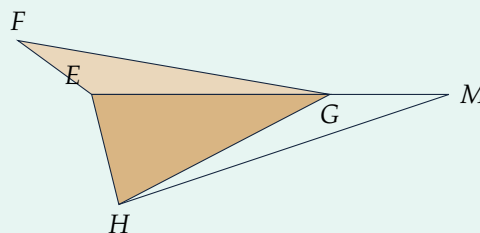
On a : $\frac{EF}{EH} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; $\frac{FG}{HM} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; $\frac{EG}{EM} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Donc : $\frac{EF}{EH} = \frac{FG}{HM} = \frac{EG}{EM}$.

D'après le troisième cas de similitude, les triangles EFG et EHM sont semblables.

Il résulte que leurs angles homologues ont mêmes mesures. donc : $\widehat{FEG} = \widehat{MEH}$.

D'où : $[EM)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{FEH}$.



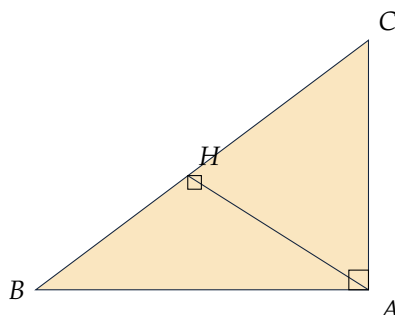
02

Investissement — Je m'entraîne

Calcul d'angle

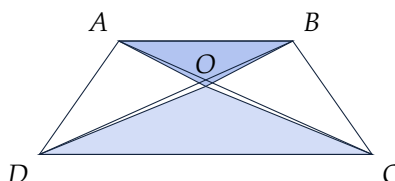
Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A et $[AH]$ sa hauteur.
Montrer que les triangles BAH et ABC sont semblables.



Exercice 2

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.
Soit O le point d'intersection de ses diagonales.
Montrer que les triangles DOC et BOA sont semblables.

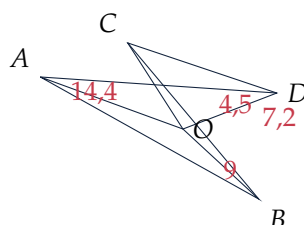


Exercice 3

Sur la figure suivante :

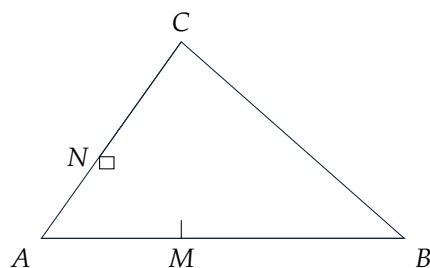
- $OA = 14,4$; $OB = 9$; $OC = 4,5$; $OD = 7,2$
- (BC) et (AD) sont sécantes en O .

Montrer que les triangles DOC et BOA sont semblables.



Exercice 4

ABC est un triangle.
Soit M le projeté orthogonal de B sur (AC) .
Soit N le projeté orthogonal de C sur (AB) .
Montrer que les triangles BAM et CAN sont semblables.



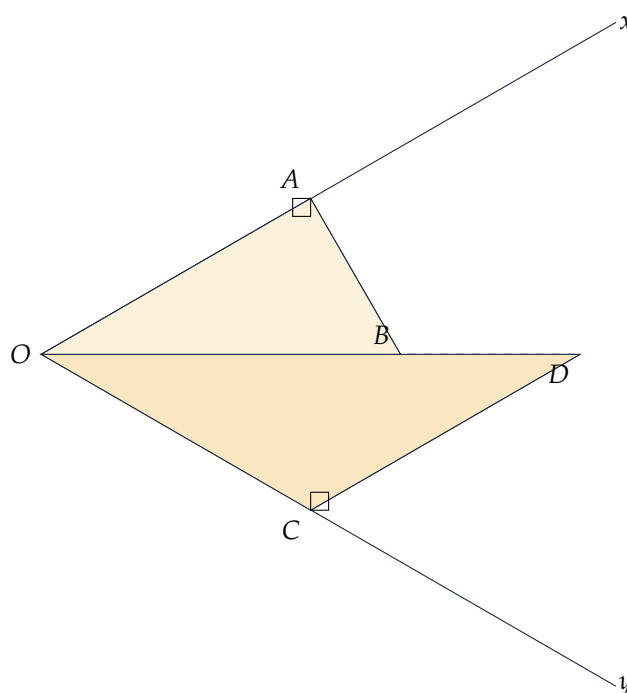
Exercice 5

$\widehat{xOy}$ est un angle aigu.

B et D sont deux points de la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Soit A le projeté orthogonal de B sur (Ox) et C le projeté orthogonal de D sur (Oy) .

Montrer que les triangles DOC et BOA sont semblables.



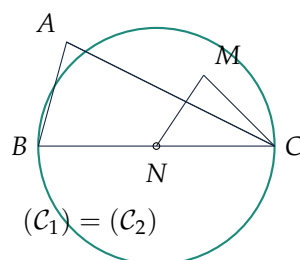
Exercice 6

Sur la figure ci-contre :

$[BC]$ est un diamètre de $(\mathcal{C}_1)$.

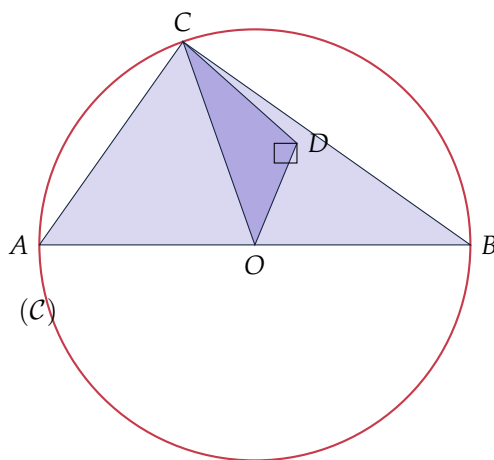
$[NC]$ est un diamètre de $(\mathcal{C}_2)$.

Montrer que les triangles MNC et ABC sont semblables.



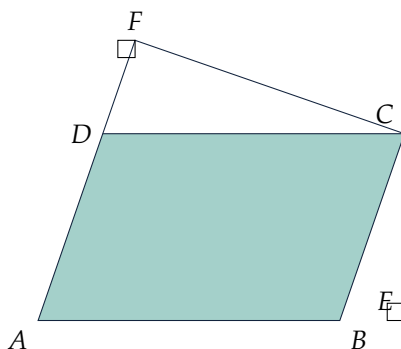
Exercice 7

ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O .
Soit D le projeté orthogonal de O sur (BC) .
Montrer que les triangles DOC et ABC sont semblables.



Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme.
La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en E et (AD) en F .
Montrer que les triangles BEC et CDF sont semblables.



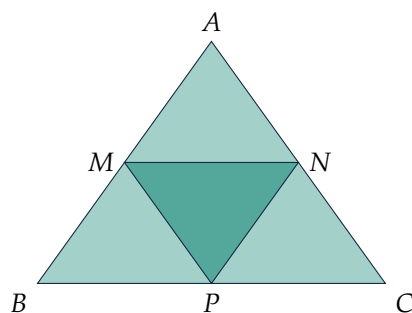
Triangles semblables pour démontrer

Exercice 9

EFG est un triangle isocèle en E tel que : $\widehat{EFG} = 72^\circ$.
La bissectrice de l'angle $\widehat{EGF}$ coupe $[EF]$ en H .
Montrer que les triangles EFG et FGH sont semblables.

Exercice 10

ABC est un triangle.
Soit M , N et P les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
1) Montrer que les triangles MNP et ABC sont semblables.
2) Calculer le rapport de similitude des triangles MNP et ABC .



Exercice 11

ABC est un triangle isocèle en A .

Soit M le milieu de $[BC]$ et E un point de $[AM]$.

La parallèle à (AC) passant par E coupe (BC) en N .

Montrer que les triangles ABM et MEN sont semblables.

Exercice 12

ABC et MNP sont deux triangles tels que :

$$BC = 9 ; \quad \widehat{BAC} = 58^\circ ; \quad \widehat{ABC} = 42^\circ ; \quad \widehat{NMP} = 58^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{MNP} = 80^\circ$$

1) Montrer que les triangles ABC et MNP sont semblables.

2) Calculer PN sachant que : $AB = 12$ et $MP = 10$.

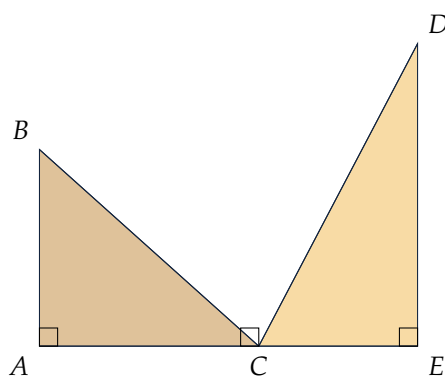
Exercice 13

Sur la figure ci-dessous :

- A, C et E sont des points alignés.
- $(AB) \perp (AE)$; $(DE) \perp (AC)$ et $(BC) \perp (CD)$.

1) Montrer que les triangles ABC et CDE sont semblables.

2) En déduire que : $CA \times CE = AB \times DE$.

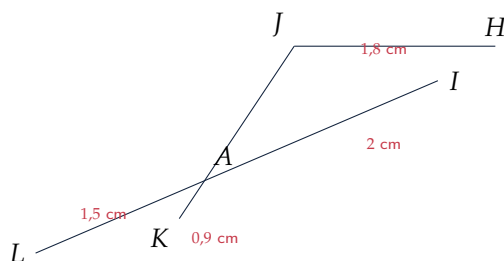
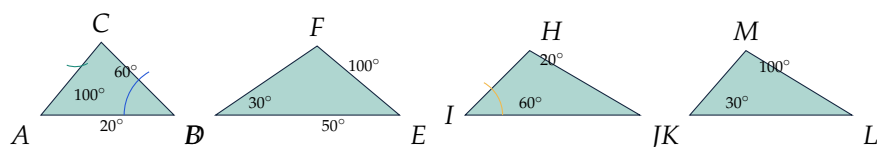


Mon bilan

Exercice 1

1) Indiquer la bonne réponse par A, B ou C :

	A	B	C
1) Un triangle semblable au triangle ABC est ...	DEF tel que : $DE = 8$ cm , $EF = 7$ cm , $DF = 11$ cm	GHI tel que : $GH = 12,6$ cm , $HI = 8,4$ cm , $IG = 7$ cm	JKL tel que : $JK = 7,2$ cm , $KL = 6$ cm , $LJ = 9,9$ cm
2) IJK est un triangle isocèle en I tel que $IJ = 5$ cm et $IK = 4$ cm. LMN est un triangle semblable à IJK avec J et M homologues, ainsi que K et N . On sait que : $MN = 14$ cm, Alors ...	$LM = 14$ cm	$LM = 15$ cm	$LM = 17,5$ cm
3) ABC est un triangle tel que : $AB = 6$ cm , $BC = 5$ cm , $CA = 9$ cm. Un triangle semblable à ABC est le triangle ...	DEF tel que : $DE = 8$ cm , $EF = 7$ cm , $DF = 11$ cm	GHI tel que : $GH = 12,6$ cm , $HI = 8,4$ cm , $IG = 7$ cm	JKL tel que : $JK = 7,2$ cm , $KL = 6$ cm , $LJ = 9,9$ cm
4) FAR et SUN sont deux triangles semblables tels que : $\frac{FA}{UN} = \frac{RA}{US} = \frac{RF}{NS}$. Alors :	$\widehat{FAR} = \widehat{SUN}$	$\widehat{AFR} = \widehat{USN}$	$\widehat{FRA} = \widehat{SNU}$
5) (JK) et (IL) deux droites sécantes en A et les droites (IJ) et (KL) sont parallèles. Alors ...	$\widehat{KLA} = \widehat{AJI}$	$AJ = 1,2$ cm	$LK = 1,2$ cm



2) En cas d'erreur, voici quelques conseils :

Savoir	Pratique
Ex. 1	Définition
Ex. 2	Propriété 1
Ex. 3	Propriété 4
Ex. 4	Propriété 2
Ex. 5	Propriété 1

3) Exercices pour la remédiation voir *R10 page : 248*.

Corrections page : 247

03

Approfondissement — Je recherche

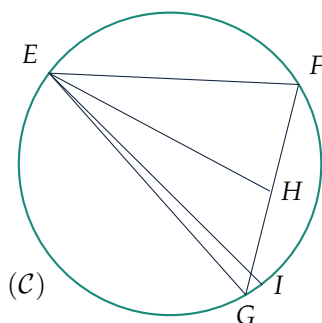
Pour montrer

Exercice 14

E , F et G sont des points d'un cercle $(\mathcal{C})$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$ coupe (FG) en H et recoupe $(\mathcal{C})$ en I .

- 1) Comparer les triangles EFH et EGI .
- 2) En déduire que : $EF \times EG = EH \times EI$



Exercice 15

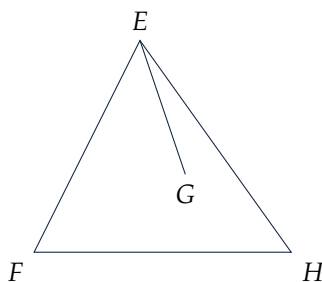
Sur la figure ci-contre :

EFG est un triangle isocèle en E .

EFH est un triangle isocèle en H .

G un point de $[FH]$.

- 1) Montrer que les triangles EFG et EHF sont semblables.
- 2) En déduire que : $EF^2 = EH \times FG$.



Exercice 16

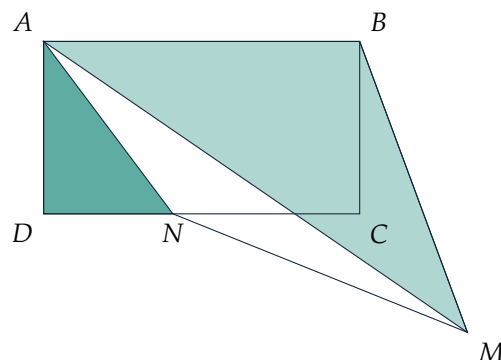
$ABCD$ est un parallélogramme tel que :

$$AB = 8 \quad \text{et} \quad AD = 3.$$

Soit N un point de $[DC]$.

La droite (AN) coupe (BC) en M .

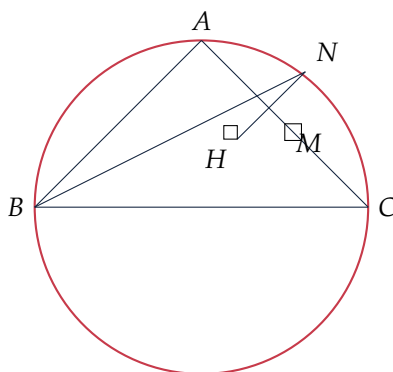
- 1) Montrer que les triangles ADN et ABM sont semblables.
- 2) En déduire que : $BM \times DN = 24$.



Exercice 17

ABC est un triangle rectangle isocèle inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[BC]$. Soit M le milieu de $[AC]$. La droite (BM) recoupe le demi-cercle en N . Soit H le projeté orthogonal de N sur $[AC]$.

- 1) Démontrer que les triangles BAM , MNH et MCN sont semblables
- 2) En déduire que : $NH = 2MH$ et $CH = 2NH$.



Exercice 18

ABC est un triangle.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en D .

La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E .

- 1) Démontrer que les triangles DAC et BED sont semblables.
- 2) Montrer que ABE est un triangle isocèle.
- 3) Déduire des deux questions précédentes que : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Exercice 19

ABC est un triangle.

La médiatrice (A) de $[BC]$ coupe $[BC]$ en M .

Soit E le symétrique de A par rapport à (A) .

Les droites (ME) et (AC) se coupent en N .

La parallèle à (CE) passant par N coupe (BC) en F .

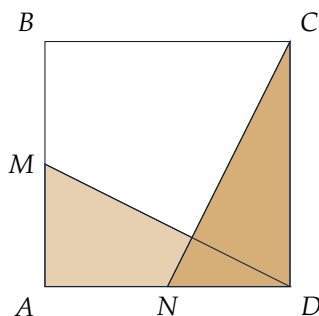
Montrer que : $MA \times MF = MN \times MB$.

Exercice 20

$ABCD$ est un carré.

Soit M et N les milieux respectifs de $[BA]$ et $[AD]$

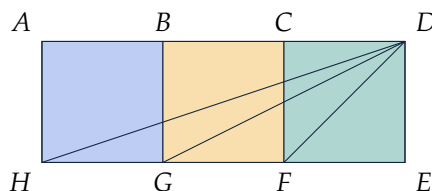
- 1) Montrer que les triangles DAM et CDN sont semblables.
- 2) En déduire que (CN) et (MD) sont perpendiculaires.



Exercice 21

Sur la figure ci-contre : $ADEH$ est un rectangle tel que : $AD = 3$ et $AH = 1$.

- 1) Calculer : $\frac{BH}{GF}$, $\frac{DH}{GD}$ et $\frac{BD}{DF}$.
- 2) En déduire une comparaison des triangles BDH et DFG .
- 3) Montrer que : $\widehat{DHE} + \widehat{DGE} = \widehat{DFE}$.



Exercice 22

ABC est un triangle tel que :

$$AB = 30, \quad BC = 40 \quad \text{et} \quad AC = 60$$

Soit M le milieu de $[AB]$ et N le point de $[AC]$ tel que : $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$.

- 1) Calculer AN et MN .
- 2) Montrer que : $\text{Aire}(MAN) = \frac{1}{16} \text{Aire}(ABC)$.

Problèmes ouverts

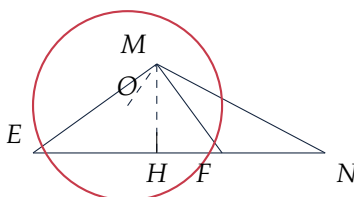
Exercice 23

(C) est un cercle de centre O et de diamètre $[EF]$.

Soit M un point de (C) ($M \neq E$ et $M \neq F$).

La tangente à (C) en M coupe (EF) en N .

- 1) Montrer que les triangles MEN et FMN sont semblables.
- 2) En déduire que : $MN^2 = EN \times FN$.



Exercice 24

Avec TICE

Sur la figure ci-contre :

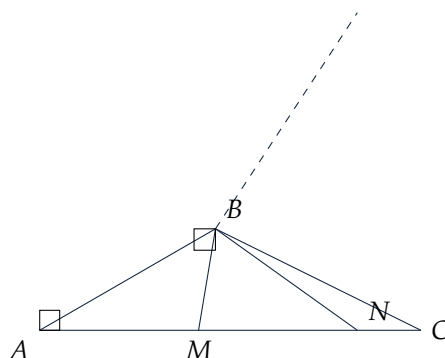
ABC est un triangle rectangle en A et $AB < AC$.

La perpendiculaire à (BC) en B coupe (AC) en N .

M est un point de $[AC]$ tel que : $\widehat{MBA} = \widehat{ACB}$.

1) Exploiter la dynamique de logiciel *Geogebra* pour conjecturer la position du point A sur $[MN]$.

2) Montrer que A est le milieu de $[MN]$.

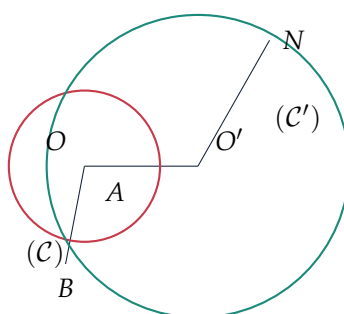


Exercice 25

Les cercles $(C) : (O; r)$ et $(C') : (O'; r')$ se coupent en A et B .

Une droite (Δ) passant par A recoupe (C) en M et (C') en N .

Montrer que les triangles OAO' et MBN sont semblables.



Challenges

Exercice 26

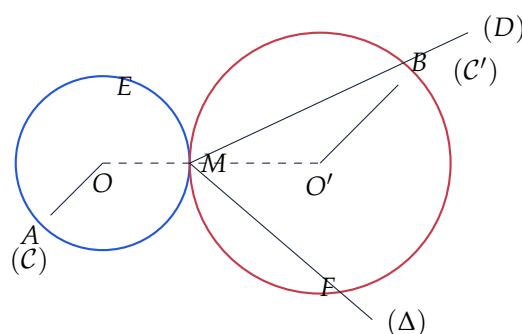
Sur la figure ci-contre :

(C) et (C') sont tangents en M .

Une droite (D) passant par M coupe (C) en A et (C') en B .

O et O' sont les centres respectifs de (C) et (C') .

Montrer que AMO et BMO' sont semblables.



Exercice 27

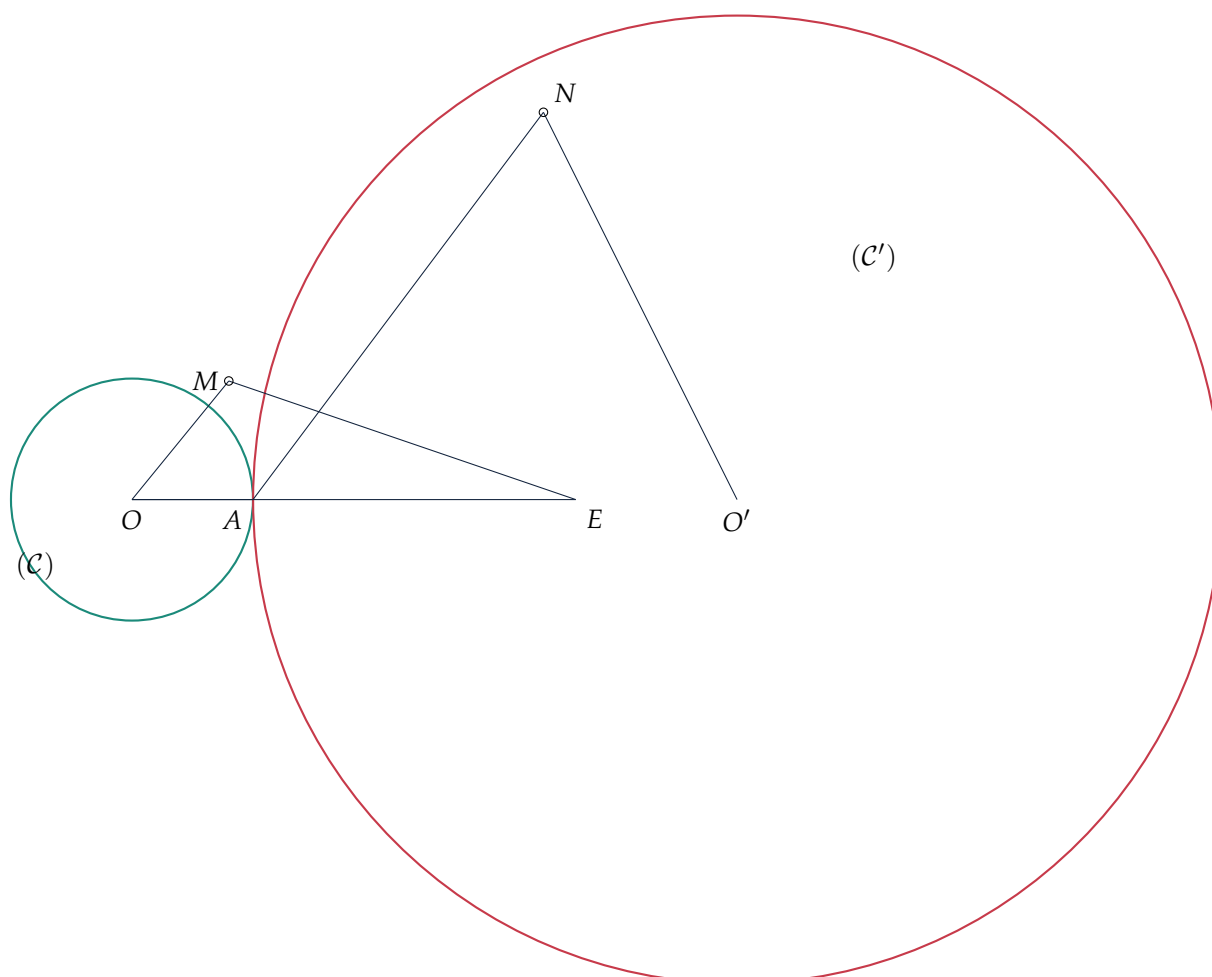
$\mathcal{C}(O; r)$ et $\mathcal{C}'(O'; r')$ sont deux cercles tangents extérieurement en A .

Soit M un point de $(\mathcal{C})$ et N un point de $(\mathcal{C}')$ tels que (MN) soit une tangente commune aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

La droite (MN) coupe (OO') en E .

1) Montrer que ANE et AME sont des triangles semblables.

2) En déduire que : $AE^2 = ME \times NE$.



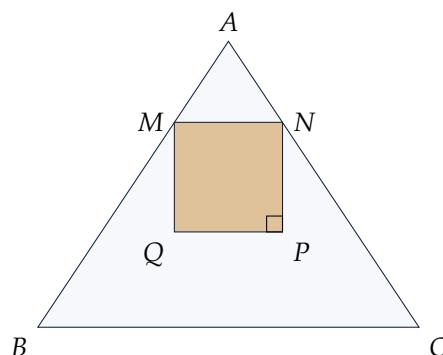
Exercice 28

Soit ABC un triangle.

Construire un carré $MNPQ$ tel que :

M est un point de $[AB]$, N est un point de $[AC]$,

P est un point de $[BC]$ et Q est un point de $[BC]$.



04

Situations proposées aux olympiades

Exercice 1

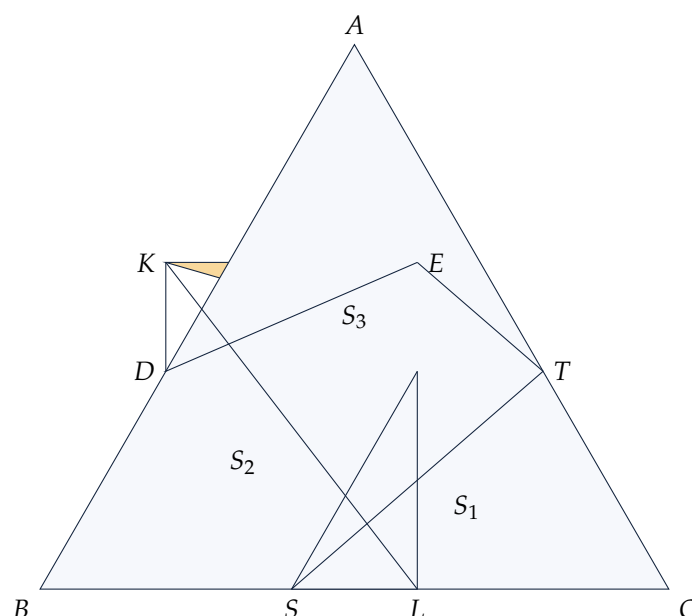
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle tel que :

$(KL) \parallel (AC)$ et $(DE) \parallel (BC)$ et $(TS) \parallel (AB)$ et $SL = 6$.

* Calculer BC .

* Montrer que : $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

où S est l'aire de ABC et S_1, S_2, S_3 sont les aires indiquées sur la figure.



05

Je me prépare à l'examen local

Exercice 29 — Exercice résolu

EFG est un triangle tel que :

$$EF = 8, \quad EG = 7 \quad \text{et} \quad FG = 10.$$

Soit M un point de $[FG]$ tel que : $GM = 4$.

Soit P le milieu de $[MF]$.

La parallèle à (EM) passant par P coupe la parallèle à (FG) passant par E en N .

Les droites (NP) et (EF) se coupent en A .

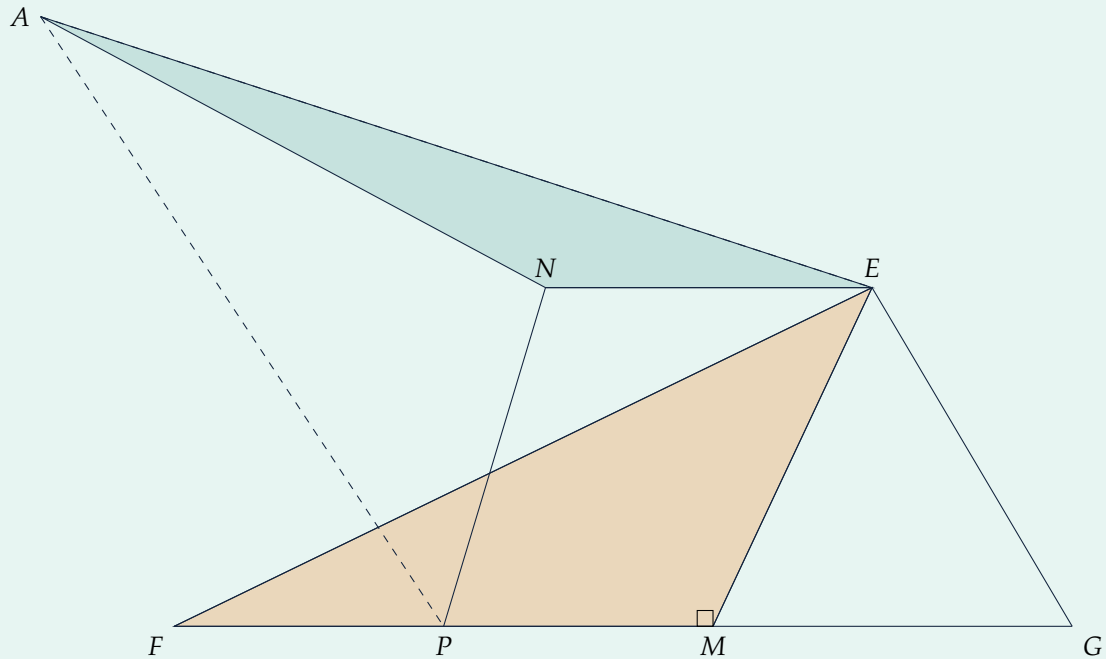
1) Montrer que les triangles ANE et MEF sont semblables.

2) En déduire que : $\frac{AE}{NE} = \frac{4}{3}$.

Correction : 29

1) Montrons que les triangles ANE et MEF sont semblables.

Considérons la sécante (EF) aux parallèles (NE) et (MP) .



Donc : $\widehat{NEA} = \widehat{EMF}$ ① (angles alternes-internes).

On a : $(NE) \parallel (MP)$ et $(NP) \parallel (EM)$.

Donc $MPNE$ est un parallélogramme.

Il en résulte que : $\widehat{ENA} = \widehat{EMF}$ ② (angles opposés).

De ① et ② et d'après le premier cas de similitude, les triangles ANE et MEF sont semblables.

2) En déduire que : $\frac{AE}{NE} = \frac{4}{3}$

On sait que ANE et MEF sont des triangles semblables.

Donc les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Il en résulte que : $\frac{AN}{ME} = \frac{AE}{EF} = \frac{NE}{MF}$

Par ailleurs : $MF = FG - MG = 10 - 4 = 6$ (car M est un point de $[FG]$ et $EF = 8$)

Donc : $\frac{AE}{8} = \frac{NE}{6}$ et $\frac{AE}{NE} = \frac{8}{6}$

D'où : $\frac{AE}{NE} = \frac{4}{3}$.

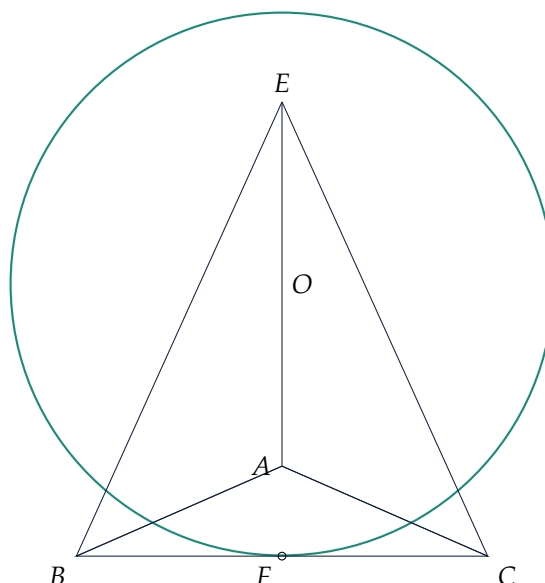
Exercice 30

ABC est un triangle isocèle en A et (C) son cercle circonscrit.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe (C) en E et $[BC]$ en F .

1) Montrer que les triangles ABE et CEF sont semblables.

2) En déduire que : $BE^2 = EA \times EF$.



Exercice 31

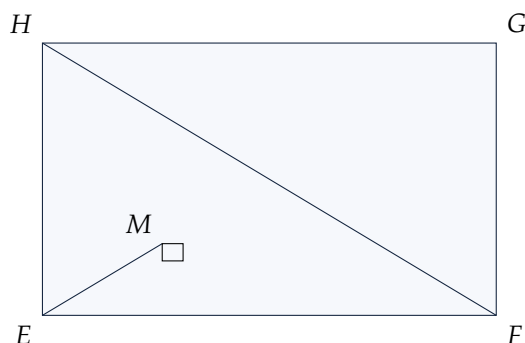
$EFGH$ est un rectangle tel que :

$$EF = 5 \quad \text{et} \quad FG = 3.$$

Soit M le projeté orthogonal de E sur (FH) .

1) Comparer les triangles FGH et EMF .

2) En déduire la distance MF .

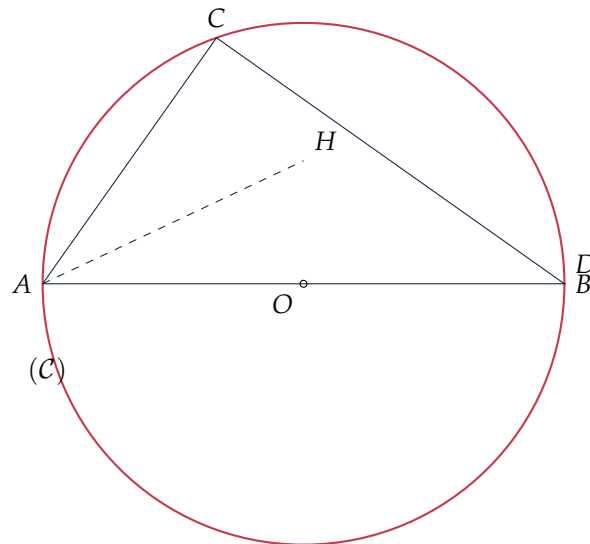


Exercice 32

$[AB]$ et $[AC]$ sont deux cordes d'un cercle (C) de rayon 3 telles que : $AB = AC$.

Soit D le point de (C) diamétralement opposé à B .

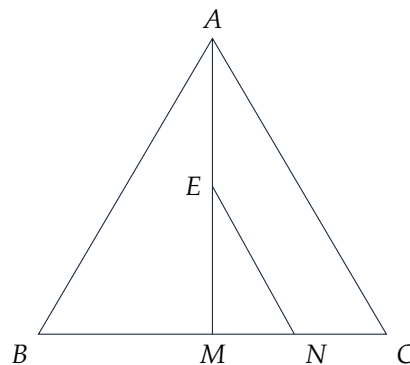
Soit H le milieu de $[BC]$.



- 1) Montrer que les triangles CAH et DAB sont semblables.
- 2) En déduire que : $AC^2 = 6AH$.

Exercice 33

ABC est un triangle isocèle en A . Soit M le milieu de $[BC]$ et E un point de $[AM]$. La parallèle à (AC) passant par E coupe (BC) en N .



Montrer que : $AC^2 = 2AM \times AE$.